**КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ
ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ
МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2023/2024 учебный год**

10 КЛАСС

10.1. Найти произведение $\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Ответ: $\frac{2n+2}{3n}$

Решение

Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&1-\frac{1}{9}=\frac{3^2-1}{9}=\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\\
&1-\frac{1}{16}=\frac{4^2-1}{16}=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4+1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\\
&1-\frac{1}{25}=\frac{5^2-1}{25}=\frac{5-1}{5}\cdot\frac{5+1}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Перемножив все равенства (1), получаем

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2n+2}{3n}$$

Комментарии

Баллы	*Критерии*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
3–5	Ход решения задачи верный, но не до конца представлены разложения на множители скобок.
1–2	Есть продвижение в решении задачи, каждая скобка приведена к общему знаменателю, числители полученных дробей представлены в виде соответствующих разностей.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.
0	Есть правильный ответ, без решения

10.2. Чтобы поздравить учителя с наступающим праздником осени, ребята подготовили прямоугольный лист и разделили его на части следующим образом: внутри отметили 14 точек, затем эти точки соединили непересекающимися отрезками друг с другом и с углами листа. В каждом образовавшемся треугольнике учащиеся написали поздравления. Сколько всего получилось пожеланий?

Ответ. 32 пожелания

Решение. Пусть прямоугольник разбился на n треугольников. Подсчитаем двумя способами сумму углов этих треугольников. С одной стороны, она равна 1800n. С другой стороны, эти углы составляют 14 полных углов и четыре угла прямоугольника, то есть сумма их равна $14\cdot360^0 + 4\cdot90^0 = 32\cdot180^0$. Отсюда $n = 32$.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно рассмотрен два случаев, но ответ получен неверный	4
Правильно рассмотрен один из случаев , но решение не найдено	2
Нет решения	0

10.3. Дан многочлен $ax^3 - ax^2 + bx + b$ с коэффициентами a≠0, b≠0, Для корней x_1, x_2, x_3 справедливо равенство $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$. Докажите это.

Доказательство. По теореме Виета имеем равенства

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ \ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{b}{a},\quad x_1x_2x_3 = -\frac{b}{a}.$$

Тогда

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = (x_1 + x_2 + x_3)\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3} = 1 \cdot \frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}} = -1.$$

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Доказательство проведено верно	7
Записана теорема Виета для кубического уравнения, составлена система уравнений, выражения подставлены в доказываемое равенство, но вычислительная ошибка не позволила довести доказательство до конца	5
Записана теорема Виета для кубического уравнения, составлена система уравнений для данного трехчлена	3
Записана теорема Виета для кубического уравнения	2
Нет решения	0

10.4. У пирата Билла есть восемь неполных (недопитых) бутылок воды. Билл может взять любые две бутылки, перелить часть воды из одной бутылки в другую, и уравнять в них количество воды. Докажите, что, поступая таким образом, Билл сможет добиться того, чтобы во всех его недопитых бутылках стало одинаковое количество воды.

Доказательство.

Билл может разбить бутылки на пары и уравнять количество воды, налитое в бутылки каждой пары. После этого он выбирает по одной бутылке из каждой пары. Если он сумеет уравнять в них количество воды, то проделав аналогичные операции с оставшимися четырьмя бутылками, Билл добьется того, что во всех 8 бутылках будет воды поровну.

Итак, Билл выбрал 4 бутылки и разбил их на пары. После этого он уравнивает количество воды, налитое в бутылки каждой пары. Далее он выбирает по одной бутылке из каждой пары и уравнивает в них количество воды. Проделав тоже самое с оставшимися двумя бутылками, Билл получит требуемое – четыре бутылки, в которых налито одинаковое количество воды.

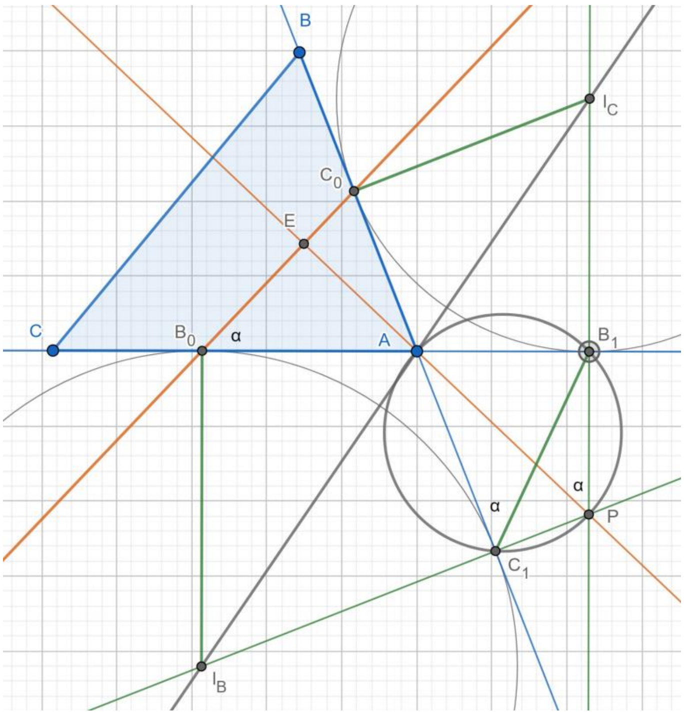
Комментарии.

Баллы	Критерии
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4–5	Ход решения задачи верный. Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца,
1	Есть продвижение в решении задачи,
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует

10.5. Вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_C касается стороны AB в точке C_0, а продолжения стороны CA − в точке B_1. Вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_B касается стороны AC в точке B_0, а продолжения стороны BA − в точке C_1. Прямые I_CB_1 и I_BC_1 пересекаются в точке P. Докажите, что прямые AP и C_0B_0 перпендикулярны.

(**Вневписанной окружностью** треугольника называется окружность, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

Решение. Треугольники AB_0C_0 и AC_1B_1 равны по двум сторонам и углу между ними: $AC_0 = AB_1$ как отрезки касательных к окружности с центром в точке I_C, $AB_0 = AC_1$ как отрезки касательных к окружности с центром в точке I_B, углы $\angle B_0AC_0 = \angle C_1AB_1$ равны как вертикальные. Из равенства треугольников следует $\angle AB_0C_0 = \angle AC_1B_1$. Пусть $\angle AB_0C_0 = \angle AC_1B_1 = \alpha$. Так как в четырёхугольнике AC_1PB_1 сумма противоположных углов $\angle AB_1P = 90^0$ и $\angle AC_1P = 90^0$ равна 180^0, то вокруг него можно описать окружность. В этой окружности $\angle APB_1 = \angle AC_1B_1 = \alpha$, так как они опираются на дугу AB_1. Рассмотрим треугольники AEB_0 и AB_1P (E − точка пересечения прямых AP и C_0B_0). Треугольники AEB_0 и AB_1P − подобны, так как $\angle APB_1 = \angle AC_1B_1 = \alpha$, $\angle EAB_0 = \angle B_1AP$ как вертикальные. Из подобия следует равенство углов $\angle AEB_0 = \angle AB_1P = 90^0$. Значит прямые AP и C_0B_0 перпендикулярны. Что и требовалось доказать.



Комментарии

Баллы	*Критерии*
7	Верное решение
6	Верное решение с недочётами
4-5	Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки
2-3	Решение в целом неверно, но содержит более или менее существенное продвижение в верном направлении (например, доказана вписанность четырёхугольника AC_1PB_1)
1	Доказано равенство треугольников AB_0C_0 и AC_1B_1
0	Решение неверно или отсутствует

Замечание. Если в решении предложены иные идеи и методы, необходимо пользоваться общими критериями.