7 КЛАСС

7.1. *Решение.* Найдем общее количество сыгранных партий: Костя сыграл в двенадцати партиях, Юра участвовал в семи, а Сережа в одиннадцати: $n = \dfrac{12+7+11}{2} = 15$.

Делаем выводы:

Костя не участвовалв 15-12=3 партиях,

Юра не участвовал в 15-7=8 партиях,

Сережа не участвовал в 15-11=4 партиях.

При игре на вылет один игрок не может подряд пропустить две партии, следовательно,Юра был «ждуном» в самой первой партии, т.к. он не участвовал в 8 из 15 партий, а затем пропускал каждую вторую партию, т.е. проиграл все свои партии.

Число побед Кости над Юрой равно количеству их встреч, которое можно найти как разность между общим количеством партий (15) и числом партий, в которых участвовал Сережа (11): 15-11=4.

7.2.*Решение.* Составим таблицу

	Василиса	**Иван-царевич**	**Кощей Бессмертный**
Первый амулет	невидимость	невидимость	летание
Второй амулет	невидимость	летание	летание

Василиса и Кощей оба раза называли одни и те же амулеты, а доставались им разные, значит именно они обманывали по одному разу. Следовательно, Иван-царевич оба раза говорил правду: первый раз ему достался амулет для невидимости, а второй раз – для летания. Ему не достался амулет для вечной жизни.

Василиса утверждала, что в первый раз ей достался амулет для невидимости, но этот амулет был у Ивана-царевича, т.е. первый раз неправду сказала Василиска (Иван-царевич и Кощей Бессмертный сказали правду), а во второй раз соврал Кощей Бессмертный, т.к. амулет для летания был у Ивана-царевича, который ни разу не обманул. Составим новую таблицу с учетом полученной информации:

	Василиса	**Иван-царевич**	**Кощей Бессмертный**
Первый амулет	~~невидимость~~ вечная жизнь	невидимость	летание
Второй амулет	невидимость	летание	~~летание~~ вечная жизнь
Не достался	летание	вечная жизнь	невидимость

7.3. *Решение.* Исходное равенство равносильно следующему равенству:

$16x^2 – 20x – y^2 + 5y = 0$

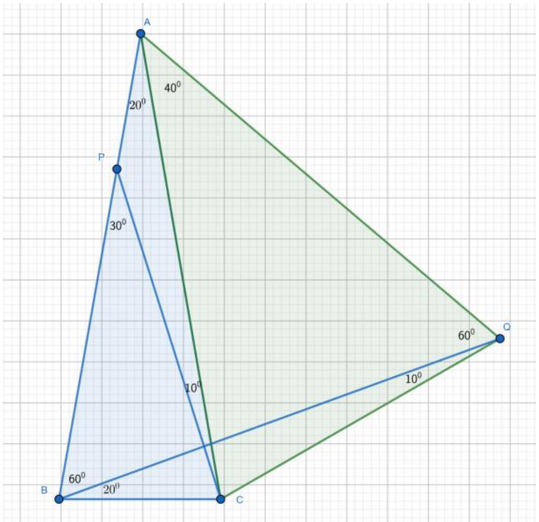
$(4x – y)(4x + y) – 5 (4x – y) = 0$

$(4x – y)(4x + y – 5) = 0$

Т.к. $x, y \in N$, то $x, y \geq 1$, поэтому выражение 4x + y – 5≥5 и не может равняться нулю. Поэтому остается только один вариант: 4x – y = 0, т.е. y=4x: y в четыре раза больше x.

7.4. *Решение.*

Построим вне треугольника ABC равнобедренный треугольник ACQ с основанием CQ и углом 40^0 при вершине A. Тогда треугольник ABQ равносторонний, а по теореме о внешнем угле треугольника



$\angle ACP = \angle BPC - \angle CAP = 30^0 - 20^0 = 10^0$.

Треугольники BCQ и APC равны по стороне, BQ = AQ = AC, и двум прилежащим к ней углам:

$\angle BQC = \angle AQC - \angle AQB = 70^0 - 60^0 = 10^0 = \angle ACP$,

$\angle CBQ = \angle ABC - \angle ABQ = 80^0 - 60^0 = 20^0 = \angle PAC$.

Следовательно, AP = BC. Что и требовалось доказать.

7.5. *Решение.*Можно заметить, что после посещеня гномов число орехов делится на 5. Пусть дракон нашелn орехов, тогда n= 5a.

Значит, шестой гномнашел 6a+1 орехов, что также делится на 5, значит, a = 5b-1, то есть 6a + 1 = 5(6b-1).

Пятый гном нашел $6(6b-1)+1=6^2b-5$. При этом 6^2b-5 делится на 5, откуда b делится на 5, то есть b = 5c, $6^2b-5=5(6c^2-1)$.

Продолжая таким образом, получаем, что второй гном нашел $6(6^4e-1)+1=6^5e-5$ При этом e делится на 5, то есть $e=5f$, $\quad 6^5e-5=5(6^5f-1)$.

Первый гном нашел 6^6f-5.

Получаем, что $b=5c=...=5^4f$. Тогда $n=5a=5(5b-1)=5^6f-5$. Т.к.

$f \geq 1, \quad b \geq 5^6-5=15620$

8 КЛАСС

8.1. *Доказательство.*

Трапеция не может быть параллелограммом. Поэтому, если Зеленый прав, то на доске нарисовано не больше одного параллелограмма, и Синий с Оранжевым оба неправы. Но по условию неправду сказал только один человек. Значит, это Зеленый соврал, а Синий и Оранжевый сказали правду. Но это значит, что по крайней мере один из трёх нарисованных на доске четырёхугольников одновременно является прямоугольником и ромбом, то есть квадратом.

8.2. *Решение.* Первое решение. Пусть НОД(n, m) = d, n = xd, m = yd. Тогда НОК(n, m) = xyd и уравнение принимает вид d+xyd = xyd2/2, откуда 2xy+2 = xyd. Значит, 2 делится на xy, то есть xy = 1 или xy = 2. В первом случае имеем x = y = 1, d = 4, то есть n = m = 4; во втором числа x и y — это 1 и 2 (в каком-то порядке), а d = 3, откуда n и m — это 3 и 6.

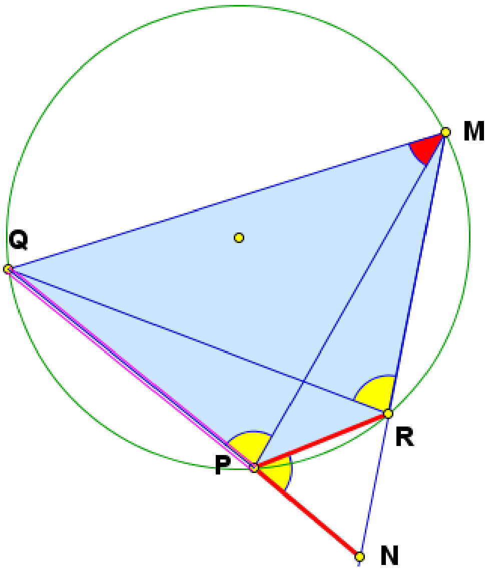
Второе решение. Так как число nm/2 — целое, среди чисел n и m есть чётное. Пусть это число n. Тогда НОД(n, m) = nm/2–НОК(n, m) делится на m. Это возможно только если НОД(n, m) = m, то есть n делится на m. С другой стороны, nm/2 и НОК(n, m) кратны n/2, поэтому НОД(n, m) = m делится на n/2. Таким образом, либо n = m, либо n = 2m. В первом случае получаем 2m = m2/2, то есть n = m = 4, во втором m+2m = m2, то есть n = 6 и m = 3. Случай, когда m четно, разбирается аналогично и дает решение n = 3, m = 6.

8.3. *Решение.* Пусть в момент, когда Иа-Иа посмотрел на часы, было x минут второго. Так как за минуту минутная стрелка проходит 6°, а часовая — 0,5°, то часовая стрелка в этот момент образовывала с направлением на 12 часов угол в 30°+0,5x°, а минутная — угол в 6x°. За час минутная стрелка совершила полный оборот и оказалась на прежнем месте, а часовая повернулась на 30°. Очевидно, минутная стрелка будет направлена вдоль прямой, делящей пополам угол между двумя положениями часовой стрелки. Значит, $6x^\circ = \dfrac{(30^\circ + 0,5x^\circ) + (60^\circ + 0,5x^\circ)}{2}$, если минутная стрелка лежит внутри угла, образованного двумяположениями часовой, либо $6x^\circ - 180^\circ = \dfrac{(30^\circ + 0,5x^\circ) + (60^\circ + 0,5x^\circ)}{2}$, если нет. Решая эти два уравнения, получаем два указанных выше ответа.

8.4. *Доказательство.* Подсчитаем, сколько пар общих знакомых у каждой пары школьников, т. е. сколько в графе знакомств существует циклов длины 4 с этими двумя противоположными вершинами. При этом каждый цикл длины 4 будет учтён дважды, поэтому сумма всех полученных результатов подсчёта будет чётна. Допустим, утверждение задачи неверно. Тогда у каждой пары учеников либо 10, либо 11 общих знакомых. В первом случае у них будет $10 \cdot 9/2 = 45$, а во втором — $11 \cdot 10/2 = 55$ пар общих знакомых. При этом всего пар участников кружка имеется $42 \cdot 41/2 = 21 \cdot 41$, и получается, что сумма всех результатов подсчёта нечётна как сумма нечётного числа нечётных слагаемых. Противоречие.

8.5. *Решение.*

Поскольку $\angle MRQ = \angle MPQ$, то четырёхугольник MRPQ – вписанный. ПосколькутреугольникRNP



равнобедренный с $\angle RPN = 80°$, в нём $\angle NRP = \angle RNP = 50$. Значит, $\angle QRP = 180° - \angle MRQ - \angle NRP = 50°$. Поскольку MRPQ вписанный, $\angle QMP = \angle QRP = 50°$.

9 КЛАСС

9.1. *Решение.*

Пусть x – число девушек, а y – число юношей.

По условию задачи:

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x\le 26 \quad (27-1=26) \\ y\le 14 \quad (15-1=14) \end{cases} \quad \begin{cases} x=40-y \\ -y\ge -14 \\ x\le 26 \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 40-14 \\ x\le 26 \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 26 \\ x\le 26 \end{cases}$$

Таким образом, x = 26 – число девушек, а y = 40 – 26 = 14 – число юношей.

9.2. *Решение.*

Пусть $x_1 = D$, $x_2 = 2D$.

По теореме Виета: $q = x_1 \cdot x_2 = 2D^2$, $p = -(x_1+x_2) = -3D.$

Уравнение можно записать в виде: $x^2 - 3Dx + 2D^2 = 0$.

Дискриминант: $D = (-3D)^2 - 4\cdot 1\cdot 2D^2 = D^2 \quad \Rightarrow D = D^2$.

Это возможно только, если D = 0 или D = 1.

Если D = 0, то $x_1 = x_2 = 0$ (не удовлетворяет условию задачи).

Если D = 1, то $x_1 = D = 1$, $x_2 = 2D = 2$.

9.3. *Решение.* Пусть $c = \sqrt{a-144}$, тогда $c^2 = a-144$ и $c^2+144 = a.$

Тогда будем иметь

$$\sqrt{a+24\sqrt{a-144}} - \sqrt{a-24\sqrt{a-144}} = \sqrt{c^2+144+24c} - \sqrt{c^2+144-24c} =$$
$$= \sqrt{(c+12)^2} - \sqrt{(c-12)^2} = |c+12| - |c-12|$$

При a = 2023, очевидно, что $c = \sqrt{x-144} > 12.$

Поэтому $\sqrt{a+24\sqrt{a-144}} - \sqrt{a-24\sqrt{a-144}} = c+12-c+12 = 24.$

9.4. *Решение.*

Выражение $\dfrac{x^2y^2}{x^4-2y^4}$ имеет смысл при условии $x^4 - 2y^4 \ne 0$.

$$\frac{x^2y^2}{x^4-2y^4} = 1$$

$$x^2y^2 = x^4 - 2y^4$$

$$x^4 - x^2y^2 - 2y^4 = 0$$

$$(x^4 - y^4) - (x^2y^2 + y^4) = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - y^2(x^2 + y^2) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - 2y^2) = 0$$

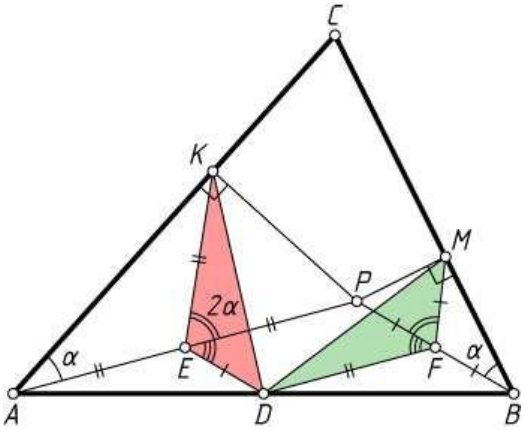
$$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 0 \end{array}\right.$$

1) $x^2 + y^2 = 0$ или $x^2 = -y^2$. Данному условию удовлетворяют только x = y = 0, но они не удовлетворяют ограничению $x^4 - 2y^4 \neq 0$.

2) $x^2 - 2y^2 = 0$ или $x^2 = 2y^2$. Ненулевые числа x и y, удовлетворяющие этому условию, так же удовлетворяют ограничению $x^4 - 2y^4 \neq 0$.

Тогда $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{2y^2 - y^2}{2y^2 + y^2} = \dfrac{y^2}{3y^2} = \dfrac{1}{3}$.

9.5.*Доказательство*.Пусть ∠PAC = ∠PBC = α. Если E и F − середины AP и BP соответственно, то ∠KEP = ∠MFP = 2α. Поскольку DE и DF − средние линии треугольника APB, то DEPF − параллелограмм, а так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы , то



KE = EP = DF и ED = FP = FM,

∠KED = 2α + ∠PED = 2α + ∠PFD = ∠MFD.

Поэтому треугольники KED и DFM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, DK = DM.

10 КЛАСС

10.1

Решение

Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{3^2-1}{9}=\dfrac{3-1}{3}\cdot\dfrac{3+1}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3} \\ 1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{4^2-1}{16}=\dfrac{4-1}{4}\cdot\dfrac{4+1}{4}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4} \\ 1-\dfrac{1}{25}=\dfrac{5^2-1}{25}=\dfrac{5-1}{5}\cdot\dfrac{5+1}{5}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{5} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n^2-1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Перемножив все равенства (1), получаем

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2n+2}{3n}$$

10.2.*Решение.* Пусть прямоугольник разбился на n треугольников. Подсчитаем двумя способами сумму углов этих треугольников. С одной стороны, она равна $180^0 n$. С другой стороны, эти углы составляют 14 полных углов и четыре угла прямоугольника, то есть сумма их равна $14\cdot 360^0 + 4\cdot 90^0 = 32\cdot 180^0$. Отсюда $n = 32$.

10.3. *Доказательство.* По теореме Виета имеем равенства

$$x_1+x_2+x_3=1,\ \ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{b}{a},\ \ x_1x_2x_3=-\frac{b}{a}.$$

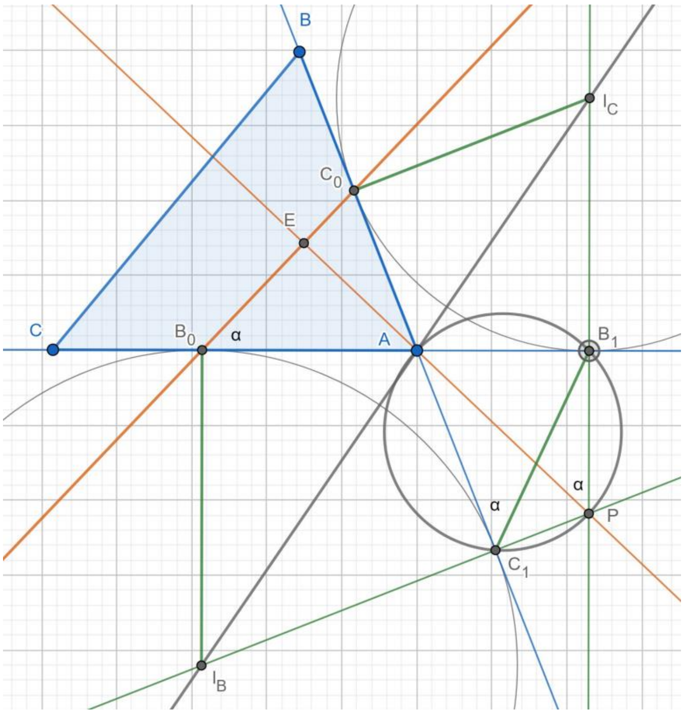
Тогда

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{x_1x_2x_3}=1\cdot\frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}=-1.$$

10.4. *Доказательство.* Билл может разбить бутылки на пары и уравнять количество воды, налитое в бутылки каждой пары. После этого он выбирает по одной бутылке из каждой пары. Если он сумеет уравнять в них количество воды, то проделав аналогичные операции с оставшимися четырьмя бутылками, Билл добьется того, что во всех 8 бутылках будет вода поровну.

Итак, Билл выбрал 4 бутылки и разбил их на пары. После этого он уравнивает количество воды, налитое в бутылки каждой пары. Далее он выбирает по одной бутылке из каждой пары и уравнивает в них количество воды. Проделав тоже самое с оставшимися двумя бутылками, Билл получит требуемое – четыре бутылки, в которых налито одинаковое количество воды.

10.5. *Доказательство.* Треугольники AB_0C_0 и AC_1B_1 равны по двум сторонам и углу между ними: $AC_0 = AB_1$ как отрезки касательных к окружности с центром в точке I_C, $AB_0 = AC_1$ как отрезки касательных к окружности с центром в точке I_B, углы $\angle B_0AC_0 = \angle C_1AB_1$ равны как вертикальные. Из равенства треугольников следует $\angle AB_0C_0 = \angle AC_1B_1$. Пусть $\angle AB_0C_0 = \angle AC_1B_1 = \alpha$. Так как в четырёхугольнике AC_1PB_1 сумма противоположных углов $\angle AB_1P = 90^0$ и $\angle AC_1P = 90^0$ равна 180^0, то вокруг него можно описать окружность. В этой окружности $\angle APB_1 = \angle AC_1B_1 = \alpha$, так как они опираются на дугу AB_1. Рассмотрим треугольники AEB_0 и AB_1P (E − точка пересечения прямых AP и C_0B_0). Треугольники AEB_0 и AB_1P − подобны, так как $\angle APB_1 = \angle AC_1B_1 = \alpha$, $\angle EAB_0 = \angle B_1AP$ как вертикальные. Из подобия следует равенство углов $\angle AEB_0 = \angle AB_1P = 90^0$. Значит прямые AP и C_0B_0 перпендикулярны. Что и требовалось доказать.



11 КЛАСС

11.1.*Решение.*Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\frac{1}{9}=\frac{3^2-1}{9}=\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} \\ 1-\frac{1}{16}=\frac{4^2-1}{16}=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4+1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4} \\ 1-\frac{1}{25}=\frac{5^2-1}{25}=\frac{5-1}{5}\cdot\frac{5+1}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Перемножив все равенства (1), получаем

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2n+2}{3n}$$

11.2.*Решение.*Пусть числа x, y$\in Z$ удовлетворяют уравнению, тогда

$$y^2=\big(x(x+8)\big)\big((x+1)(x+7)\big)=(x^2+8x)(x^2+8x+7)=z^2+7z,$$

где обозначено$z=x^2+8x$. Если z > 9, то

$$(z+3)^2=z^2+6z+9<z^2+7z=y^2<z^2+8z+16=(z+4)^2,$$

а значит, число y^2 заключено между квадратами двух последовательных натуральных чисел, что невозможно. Поэтому $x^2+8x=(z+4)^2$, откуда —9 ≤x≤ 1. Перебирая последовательно значения x=—9, —8..., 1, находим, что число x (x+ 1) (x+ 7) (x+8) является квадратом целого числа только при x, равном —9, —8, —7, —4, —1, 0 и 1. Таким образом, получаем все решения исходного уравнения: (—9; 12), (9; —12), (—8; 0); (-7; 0), (-4; 12), (—4; —12), (-1, 0); (0; 0),
(1; 12), (1; —12).

11.3.

Решение. Пусть одиннадцатиклассников x математиков и y программистов, а десятиклассников летz математиков и v программистов.

Так как $x+y+z+v=m(v+20)+5v+v+20+v=(m+7)v+20m+20$, то для решения задачи достаточно найти mи v.

$m(v+20)+5v=v+20+v+600$.Следовательно, $(m+3)v=620-20m$.

Отсюда, $v=\frac{620-20m}{m+3}=\frac{620+60-60-20m}{m+3}=\frac{680}{m+3}-20$. По условию задачи $v\in N$. Значит, $9\le$m+3≤ 15является делителем числа 680. Среди чисел 9,10,11,12,13,14,15 это только число 10. Следовательно, m+3=10. Таким образом, m=7 и v=48.

Отсюда, $x+y+z+v=(7+7)48+20\cdot 7+20=672+140+20=832$.

Значит, на олимпиаде 832 школьника.

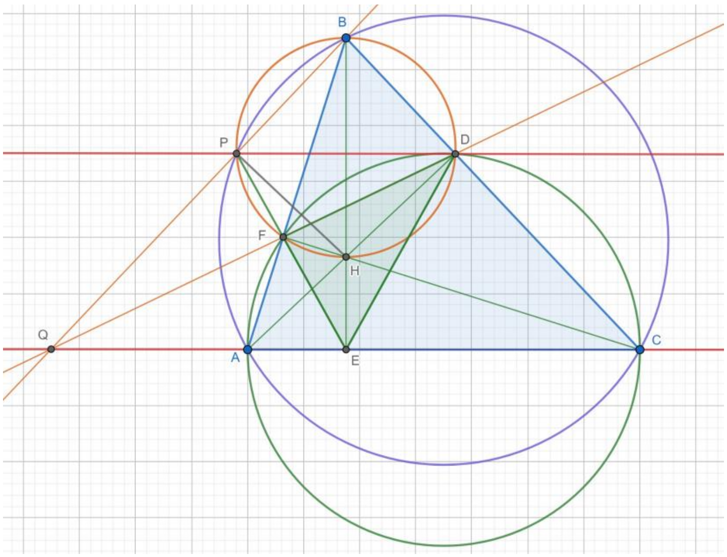
11.4.*Решение.*Используя теорему о средних, имеем

$\sqrt[4]{2x^2y^2z^2u}=\sqrt[4]{2x\cdot xy\cdot z\cdot yzu}\le\frac{2x+xy+z+yzu}{4}=\frac{1}{4}$, т.е. $x^2y^2z^2u\le\frac{1}{512}$.

Равенство достигается, если $2x=xy=z=yzu=\frac{1}{4,}$ т.е. при $x=\frac{1}{8},y=2,z=\frac{1}{4,u=\frac{1}{2.}}$

Итак, наибольшее значение равно $\frac{1}{512.}$

11.5.*Доказательство.*



Пусть H − ортоцентр треугольника ABC (точка пересечения его высот), тогда для ортотреуглльника FED (треугольник, построенный на основаниях высот) эта точка является точкой пересечения его биссектрис.

Значит, в равнобедренном треугольнике PED биссектриса EH является и высотой. Так как BE перпендикулярна PD и AC, прямые PD и AC − параллельны.

Заметим, что около четырёхугольника AFDC можно описать окружность: ∠AFC = ∠ADC = 900. Назовём её ω1.

Также можно описать окружность около четырёхугольника PBDH. Докажем это. Точка H лежит на биссектрисе, проведённой к основанию равнобедренного треугольника PED, следовательно, HP = HD и ∠PHB = ∠DHB. Для треугольников BPH и BDH с общей стороной BH выполняется равенство по двум сторонам и углу между ними. Значит ∠BDH = ∠BPH = 900, что указывает на вписанность четырёхугольника PBDH.

Из вписанности четырёхугольника AFDC следует равенство углов ∠BFD = ∠ACD. Отметим равенство углов ∠ACD и ∠BHD: ∠BHD дополняет ∠DHE до 1800; в четырёхугольнике EHDC сумма ∠DHE + ∠ACD = 1800, так как ∠HEC = ∠HDC = 900. Таким образом, имеем ∠BFD = ∠ACD = ∠BHD. Отмеченное равенство указывает на принадлежность точки F окружности четырёхугольника PBDH. Назовём эту окружность ω2.

Пусть ω3 − окружность, описанная около треугольника ABC.

Дальнейшее рассуждение 1.

Докажем вписанность четырёхугольника QPFA: ∠QPA = ∠ACB, т.к. APBC вписан в ω3, ∠QFA = ∠ACB, т.к. AFDC вписан в ω1, следовательно ∠QPA =∠QFA. Из вписанности QPFA имеем ∠QPF + ∠QAF = 1800.

∠QPF = ∠BDF (из вписанности PBDF), ∠BDF = ∠FAC (из вписанности AFDC), таким образом, ∠QPF =∠FAC. А так как ∠QPF + ∠QAF = 1800, то и ∠FAC+ ∠QAF = 1800. Это говорит о принадлежности точки Q прямой AC, которая параллельна PD, что и требовалось доказать.

Дальнейшее рассуждение 2.

Прямая PB − радикальная ось окружностей ω3 и ω1, прямая FD − радикальная ось окружностей ω1 и ω2, прямая AC − радикальная ось окружностей ω3 и ω2. Поскольку BP и DF пересекаются в точке Q, то и AC проходит через точку Q. Следовательно, QC и DP параллельны. Что и требовалось доказать.