КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ

ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ

ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/2024 учебный год

8 КЛАСС

8.1. Жители далекой планеты обожают рисовать четырехугольники. Зеленый житель посмотрел на три четырёхугольника, которые появились на асфальте за последние 10 минут и сказал: «Здесь по крайней мере две трапеции». Синий житель возразил: «На асфальте нарисованы по крайней мере два прямоугольника». Оранжевый житель посмотрел на асфальт, подумал и заявил: «На асфальте - по крайней мере два ромба». Докажите, что среди нарисованных на асфальте за последние 10 минут трех четырёхугольников есть квадрат при условии, что один житель сказал неправду, а остальные – чистую правду.

Доказательство.

Трапеция не может быть параллелограммом. Поэтому, если Зеленый прав, то на доске нарисовано не больше одного параллелограмма, и Синий с Оранжевым оба неправы. Но по условию неправду сказал только один человек. Значит, это Зеленый соврал, а Синий и Оранжевый сказали правду. Но это значит, что по крайней мере один из трёх нарисованных на доске четырёхугольников одновременно является прямоугольником и ромбом, то есть квадратом.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Словосочетание «по крайней мере два» прочитано как «ровно два», и решена формально более простая задача	6
Доказано только, что Зеленый лжёт	4
Проверено только, что в случае «Зеленый солгал» и «Квадрат— это ромб и прямоугольник одновременно» не возникает противоречий	2
Сформулировано в явном виде утверждение, эквивалентное такому: "рассмотрим фигуры из двух верных утверждений. Тогда одна фигура обладает обоими свойствами", дальнейшего содержательного продвижения нет	1
Нет решения	0

8.2. Известно, что выполняется равенство: НОД(m, n)+НОК(m, n) = mn/2, где n и m – натуральные числа. Найдите всевозможные значения пар чисел n и m.

Ответ. n = m = 4; n = 3, m = 6; n = 6, m = 3.

Решение. Первое решение. Пусть НОД(n, m) = d, n = xd, m = yd. Тогда НОК(n, m) = xyd и уравнение принимает вид d+xyd = xyd2/2, откуда 2xy+2 = xyd. Значит, 2 делится на xy, то есть xy = 1 или xy = 2. В первом случае имеем x = y = 1, d = 4, то есть n = m = 4; во втором числа x и y — это 1 и 2 (в каком-то порядке), а d = 3, откуда n и m — это 3 и 6.

Второе решение. Так как число nm/2 — целое, среди чисел n и m есть чётное. Пусть это число n. Тогда НОД(n, m) = nm/2–НОК(n, m) делится на m. Это возможно только если НОД(n, m) = m, то есть n делится на m. С другой стороны, nm/2 и НОК(n, m) кратны n/2, поэтому НОД(n, m) = m делится на n/2. Таким образом, либо n = m, либо n = 2m. В первом случае получаем 2m = m2/2, то есть n = m = 4, во втором m+2m = m2, то есть n = 6 и m = 3. Случай, когда m четно, разбирается аналогично и дает решение n = 3, m = 6.

Комментарии.

Критерии	Баллы
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно найдено два решения	5
Правильно найдено только одно решение	3
Нет решения	0

8.3. Ослик Иа-Иа посмотрел на часы, висевшие на перилах мостика, и отметил, что был только второй час дня. До встречи с Винни Пухом оставалось еще очень много времени. Ослик начал грустно смотреть на разноцветные листья, выплывающие из-под моста. Ровно через 60 минут раздался веселый голос медвежонка Винни Пуха. Иа-Иа машинально взглянул на часы и его поразило, что между минутной и часовой стрелками угол оставался тем же самым, как и при первом взгляде на часы. Когда ослик Иа-Иа начал любоваться листьями?

Ответ. В 1 час $8\frac{2}{11}$ мин или в 1 час $40\frac{10}{11}$ мин.

Решение. Пусть в момент, когда Иа-Иа посмотрел на часы, было х минут второго. Так как за минуту минутная стрелка проходит 6°, а часовая — 0,5°, то часовая стрелка в этот момент образовывала с направлением на 12 часов угол в 30°+0,5x°, а минутная — угол в 6x°. За час минутная стрелка совершила полный оборот и оказалась на прежнем месте, а часовая повернулась на 30°. Очевидно, минутная стрелка будет направлена вдоль прямой, делящей пополам угол между двумя положениями часовой стрелки. Значит, $6x^\circ = \frac{(30^\circ + 0{,}5x^\circ) + (60^\circ + 0{,}5x^\circ)}{2}$, если минутная стрелка лежит внутри угла, образованного двумя положениями часовой, либо $6x^\circ - 180^\circ = \frac{(30^\circ + 0{,}5x^\circ) + (60^\circ + 0{,}5x^\circ)}{2}$, если нет. Решая эти два уравнения, получаем два указанных выше ответа.

Комментарии.

Критерии	Баллы
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно найдено только одно решение	5
Получена правильная совокупность уравнений, но решение не найдено	3
Получено правильное одно уравнение, но решение не найдено	2
Нет решения	0

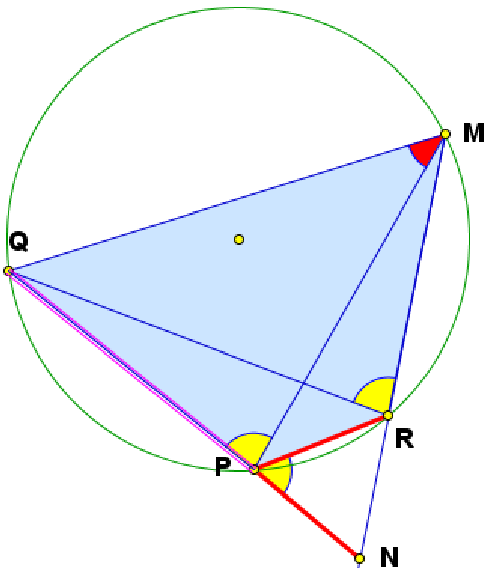
8.4. В 8 классе учатся 42 школьника и любые два ученика имеют не менее 10 общих друзей среди одноклассников. Классный руководитель предполагает, что точно можно найти двух учеников этого класса, которые имеют не менее двенадцать общих друзей среди всех учеников этого отряда. Докажите это.

Доказательство. Подсчитаем, сколько пар общих знакомых у каждой пары школьников, т. е. сколько в графе знакомств существует циклов длины 4 с этими двумя противоположными вершинами. При этом каждый цикл длины 4 будет учтён дважды, поэтому сумма всех полученных результатов подсчёта будет чётна. Допустим, утверждение задачи неверно. Тогда у каждой пары учеников либо 10, либо 11 общих знакомых. В первом случае у них будет $10\cdot 9/2 = 45$, а во втором — $11\cdot 10/2 = 55$ пар общих знакомых. При этом всего пар участников кружка имеется $42\cdot 41/2 = 21\cdot 41$, и получается, что сумма всех результатов подсчёта нечётна как сумма нечётного числа нечётных слагаемых. Противоречие.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Рассуждения верные, но строгого доказательства нет	3
Доказательство сведено к рассмотрению конкретного примера	1
Нет решения	0

8.5. Дан четырехугольник MNPQ, причем вершины P и Q находятся по одну сторону от прямой MN. На стороне MN находится точка R, образуя равнобедренный треугольник RNP: RP=NP. Углы RPN, MRQ, MPQ равны 80 градусам. Найдите угол QMP.



Ответ. 50^0

Решение. Поскольку $\angle MRQ = \angle MPQ$, то четырёхугольник MRPQ – вписанный. Поскольку треугольник RNP равнобедренный с $\angle RPN = 80°$, в нём $\angle NRP = \angle RNP = 50$. Значит, $\angle QRP = 180° - \angle MRQ - \angle NRP = 50°$. Поскольку MRPQ вписанный, $\angle QMP = \angle QRP = 50°$.

Комментарии.

Критерии	Балл
Приведено полное решение	7
Показано, что $\angle QRP = 50°$, найдено равенство углов $\angle RMP = \angle RQP$.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0