

**КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ
ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ
МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2023/2024 учебный год**

7 КЛАСС

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

7.1. Друзья Сережа, Костя и Юра играют в настольный теннис на вылет. Играют по очереди, двое играют между собой, а третий сидит и ждет своей очереди играть. После каждой игры победитель начинает следующую партию с ожидающим, а проигравший ждет своей следующей игры. Костя сыграл в 12 партиях, Юра – в 7 партиях, а Сережа – в 11 партиях. Сколько раз Костя одолел Юру?

Ответ. 4

Решение. Найдем общее количество сыгранных партий: Костя сыграл в двенадцати партиях, Юра

участвовал в семи, а Сережа в одиннадцати: $n = \frac{12 + 7 + 11}{2} = 15$.

Делаем выводы:

Костя не участвовал в $15 - 12 = 3$ партиях,

Юра не участвовал в $15 - 7 = 8$ партиях,

Сережа не участвовал в $15 - 11 = 4$ партиях.

При игре на вылет один игрок не может подряд пропустить две партии, следовательно, Юра был «ждуном» в самой первой партии, т.к. он не участвовал в 8 из 15 партий, а затем пропускал каждую вторую партию, т.е. проиграл все свои партии.

Число побед Кости над Юрой равно количеству их встреч, которое можно найти как разность между общим количеством партий (15) и числом партий, в которых участвовал Сережа (11): $15 - 11 = 4$.

Комментарий.

Критерии	Баллы
Получен правильный обоснованный ответ	7
Найдено, что Юра все партии проиграл.	3
Доказано, что в первой партии Юра не участвовал.	2
Найдено общее количество партий	1
Нет решения	0

7.2. Старец Хоттабыч приготовил для Василисы, Ивана-царевича и Кощея Бессмертного три амулета разных видов: один для невидимости, один для летания и один для вечной жизни. Василиса и Иван утверждали, что у них амулеты для невидимости, Кощей заявил, что у него амулет для летания. Позже Хоттабыч снова выдал три амулета с теми же способностями. В этот раз Василиса сказала, что у неё снова амулет для невидимости, а Иван и Кощей утверждали, что у них амулеты для летания. Старец был уверен, что каждому оба раза давал амулеты разных видов и каждый раз ровно один из них говорил неправду. Определите какой амулет не получила Василиса, какой Иван и какой Кощей.

Ответ. Коржик не ел пирожок с сыром, Карамелька не ела пирожок с вареньем, а Компот – с колбасой.

Решение. Составим таблицу

	Василиса	Иван-царевич	Кощей Бессмертный
Первый амулет	невидимость	невидимость	летание
Второй амулет	невидимость	летание	летание

Василиса и Кощей оба раза называли одни и те же амулеты, а доставались им разные, значит именно они обманывали по одному разу. Следовательно, Иван-царевич оба раза говорил правду: первый раз ему достался амулет для невидимости, а второй раз – для летания. Ему не достался амулет для вечной жизни.

Василиса утверждала, что в первый раз ей достался амулет для невидимости, но этот амулет был у Ивана-царевича, т.е. первый раз неправду сказала Василиска (Иван-царевич и Кощей Бессмертный сказали правду), а во второй раз соврал Кощей Бессмертный, т.к. амулет для летания был у Ивана-царевича, который ни разу не обманул. Составим новую таблицу с учетом полученной информации:

	Василиса	Иван-царевич	Кощей Бессмертный
Первый амулет	невидимость вечная жизнь	невидимость	летание
Второй амулет	невидимость	летание	летание вечная жизнь
Не достался	летание	вечная жизнь	невидимость

Комментарии.

Критерии	Баллы
Получен правильный обоснованный ответ	7
Доказано, что в первый раз неправду говорила Василиска, а во второй – Кощей Бессмертный.	3
Сделан вывод, что Иван-Царевич оба раза говорил правду и найден только один правильный ответ	2
Нет решения	0

7.3. Даны два натуральных числа x и y , причем справедливо равенство:

$$16x^2 - 20x = y^2 - 5y$$

Какое из этих чисел больше и во сколько раз?

Ответ. y в четыре раза больше x .

Решение. Исходное равенство равносильно следующему равенству:

$$16x^2 - 20x - y^2 + 5y = 0$$

$$(4x - y)(4x + y) - 5(4x - y) = 0$$

$$(4x - y)(4x + y - 5) = 0$$

Т.к. $x, y \in \mathbb{N}$, то $x, y \geq 1$, поэтому выражение $4x + y - 5 \geq 5$ и не может равняться нулю. Поэтому остается только один вариант: $4x - y = 0$, т.е. $y = 4x$: y в четыре раза больше x .

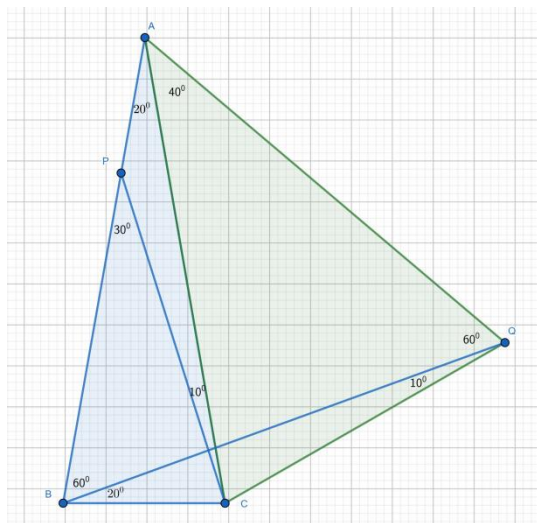
Комментарии.

Критерии	Баллы
Получен правильный обоснованный ответ	7
Получено равенство $(4x - 2,5)^2 = (y - 2,5)^2$, сделан вывод $4x - 2,5 = y - 2,5$, но второй	5

случай $4x-2,5=-(y-2,5)$ не рассмотрен	
Из равенств $(4x-y)(4x+y-5)=0$ получен ответ, но нет объяснения почему $4x+y-5 \neq 0$	5
Рассмотрен пример конкретных чисел	1
Приведен только ответ без объяснений.	

7.4. На боковой стороне АВ равнобедренного треугольника ABC с основанием BC углом 20° при вершине А отмечена точка Р, причём $\angle BPC = 30^\circ$. Докажите, что $AP = BC$.

Решение.



Построим вне треугольника ABC равнобедренный треугольник ACQ с основанием CQ и углом 40° при вершине А. Тогда треугольник ABQ равносторонний, а по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle ACP = \angle BPC - \angle CAP = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ.$$

Треугольники BCQ и APC равны по стороне, $BQ = AQ = AC$, и двум прилежащим к ней углам:

$$\angle BQC = \angle AQC - \angle AQB = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ = \angle ACP,$$

$$\angle CBQ = \angle ABC - \angle ABQ = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle PAC.$$

Следовательно, $AP = BC$. Что и требовалось доказать.

Комментарии.

Критерии	Баллы
Верное решение	7
Верное решение с недочётами	6
Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки	4-5
Решение в целом неверно, но содержит более или менее существенное продвижение в верном направлении	1-3
Решение неверно или отсутствует	0

7.5. Шесть гномов спрятали в тайнике под горой драгоценные камни. В июне первый гном зашел в тайник, разделил все камни на шесть равных частей, один камень оказался лишним и он его подарил Белоснежке, а после этого унес свою часть в свою комнату. То же самое сделали остальные гномы в июле, августе, сентябре, октябре, ноябре. А в декабре в этот тайник заглянул дракон. Какое наименьшее число драгоценных камней он там обнаружил?

Ответ. 15620 камней

Решение. Можно заметить, что после посещения гномов число орехов делится на 5. Пусть дракон нашел n орехов, тогда $n = 5a$.

Значит, шестой гном нашел $6a+1$ орехов, что также делится на 5, значит, $a = 5b-1$, то есть $6a + 1 = 5(6b - 1)$.

Пятый гном нашел $6(6b - 1) + 1 = 6^2b - 5$. При этом $6^2b - 5$ делится на 5, откуда b делится на 5, то есть $b = 5c$, $6^2b - 5 = 5(6c^2 - 1)$.

Продолжая таким образом, получаем, что второй гном нашел $6(6^4e - 1) + 1 = 6^5e - 5$. При этом e делится на 5, то есть $e = 5f$, $6^5e - 5 = 5(6^5f - 1)$.

Первый гном нашел $6^6f - 5$.

Получаем, что $b = 5c = \dots = 5^4f$. Тогда $n = 5a = 5(5b - 1) = 5^6f - 5$. Т.к.
 $f \geq 1$, $b \geq 5^6 - 5 = 15620$

Комментарии.

Критерии	Баллы
Приведено полное доказательство	7
Есть правильная идея рассмотрения последовательных делимостей и роста степеней пятёрки	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0