**КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**2023/2024 учебный год**

## 11 КЛАСС

**11.1.** Решить уравнение

$$x^2 - x\cos xy + 3 = 2\sin^2 xy + 2\cos^2 xy$$

*Ответ. решений нет*

*Решение.*

$$x^2 - x\cos xy + 3 = 2\left(\sin^2 xy + \cos^2 xy\right)$$
$$x^2 - x\cos xy + 3 = 2$$
$$x^2 - x\cos xy + 1 = 0$$

Дополним до полного квадрата:

$$x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x\cos xy + \left(\frac{1}{2}\cos xy\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cos xy\right)^2 + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\cos xy\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\cos^2 xy\right) = 0 \qquad (1)$$

Очевидно, что $\left(x - \frac{1}{2}\cos xy\right)^2 \ge 0$.

Оценим значение выражения $\left(1 - \frac{1}{4}\cos^2 xy\right)$:

$$0 \le \cos^2 xy \le 1$$
$$-\frac{1}{4} \le -\frac{1}{4}\cos^2 xy \le 0$$
$$\frac{3}{4} \le 1 - \frac{1}{4}\cos^2 xy \le 1$$

Таким образом, в равенстве (1):

$$\underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\cos xy\right)^2}_{\ge 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\cos^2 xy\right)}_{\in\left[\frac{3}{4};1\right]} = 0$$

Очевидно, что данное равенство невозможно. Следовательно, уравнение не имеет решений.

*Комментарии.*

| *критерии* | *Баллы* |
|---|---|
| Полное верное решение. | 7 |
| В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не | 6 |

| | |
|---|---|
| влияющие на решение. | |
| Ход решения задачи верный, но не до конца представлены разложения на множители скобок. | 3–5 |
| Есть продвижение в решении задачи, каждая скобка приведена к общему знаменателю, числители полученных дробей представлены в виде соответствующих разностей. | 1–2 |
| Решение неверное, продвижения отсутствуют. | 0 |
| Решение отсутствует. | 0 |
| Есть правильный ответ, без решения | 0 |

**11.2.** Решить уравнение x (x+ 1) (x + 7) (x+ 8) = $y^2$ в целых числах

*Решение.* Пусть числа x, y$\in Z$ удовлетворяют уравнению, тогда

$$y^2 = \big(x(x+8)\big)\big((x+1)(x+7)\big) = (x^2+8x)(x^2+8x+7) = z^2+7z,$$

где обозначено$z = x^2+8x$. Если z > 9, то

$$(z+3)^2 = z^2+6z+9 < z^2+7z = y^2 < z^2+8z+16 = (z+4)^2,$$

а значит, число $y^2$ заключено между квадратами двух последовательных натуральных чисел, что невозможно. Поэтому $x^2+8x = (z+4)^2$, откуда —9 ≤x≤ 1. Перебирая последовательно значения x=—9, —8..., 1, находим, что число x (x+ 1) (x+ 7) (x+8) является квадратом целого числа только при x, равном —9, —8, —7, —4, —1, 0 и 1. Таким образом, получаем все решения исходного уравнения: (—9; 12), (9; —12), (—8; 0); (-7; 0), (-4; 12), (—4; —12), (-1, 0); (0; 0), (1; 12), (1; —12).

*Комментарии.*

| **Критерии** | **Баллы** |
|---|---|
| Получен правильный обоснованный ответ | 7 |
| Правильно определены неравенства | 3 |
| Рассмотрен частный случай | 2 |
| Нет решения | 0 |

**11.3.** На заключительный этап олимпиады по криптографии прошло одиннадцатиклассников на 600 человек больше, чем десятиклассников. Программистов одиннадцатиклассников в 5 раз больше, чем программистов десятиклассников. Математиков одиннадцатиклассников больше, чем математиков десятиклассников в m раз ($6 \le m \le 12$, $m \in N$).

Найдите общее число школьников, прошедших на заключительный этап олимпиады по криптографии, если математиков десятиклассников на 20 больше, чем программистов десятиклассников.

Решение.

Пусть одиннадцатиклассников $x$ математиков и у программистов, а десятиклассников лет z математиков и $v$ программистов.

Так как $x+y+z+v = m(v+20)+5v+v+20+v = (m+7)v+20m+20$, то для решения задачи достаточно найти m и $v$.

$m(v+20)+5v = v+20+v+600$. Следовательно, $(m+3)v = 620-20m$.

Отсюда, $v = \frac{620-20m}{m+3} = \frac{620+60-60-20m}{m+3} = \frac{680}{m+3} - 20$. По условию задачи $v \in N$ . Значит, 9≤m+3≤15 является делителем числа 680. Среди чисел 9,10,11,12,13,14,15 это только число 10. Следовательно, m+3=10. Таким образом, m=7 и v=48.

Отсюда, $x+y+z+v = (7+7)48+20\cdot 7+20 = 672+140+20 = 832$.

Значит, на олимпиаде 832 школьника.

Ответ:832.

*Комментарии.*

| ***Баллы*** | ***Критерии*** |
|---|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6 | В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 3–5 | Ход решения задачи верный, но рассмотрены либо не все случаи, либо не в полном объеме описана стратегия. |
| 1–2 | Есть продвижение в решении задачи, правильно предложена стратегия. |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |
| 0 | Есть правильный ответ, без решения |

**11.4.** Найти наибольшее значение произведения $x^2y^2z^2u$ при условии, что $x, y, z, u \geq 0$ и $2x + xy + z + yzu = 1$

*Ответ.* $\frac{1}{512.}$

*Решение.* Используя теорему о средних, имеем
$\sqrt[4]{2x^2y^2z^2u} = \sqrt[4]{2x \cdot xy \cdot z \cdot yzu} \leq \frac{2x+xy+z+yzu}{4} = \frac{1}{4}$, т.е. $x^2y^2z^2u \leq \frac{1}{512}$.

Равенство достигается, если $2x = xy = z = yzu = \frac{1}{4,}$ т.е. при $x = \frac{1}{8}, y = 2, z = \frac{1}{4,u=\frac{1}{2.}}$

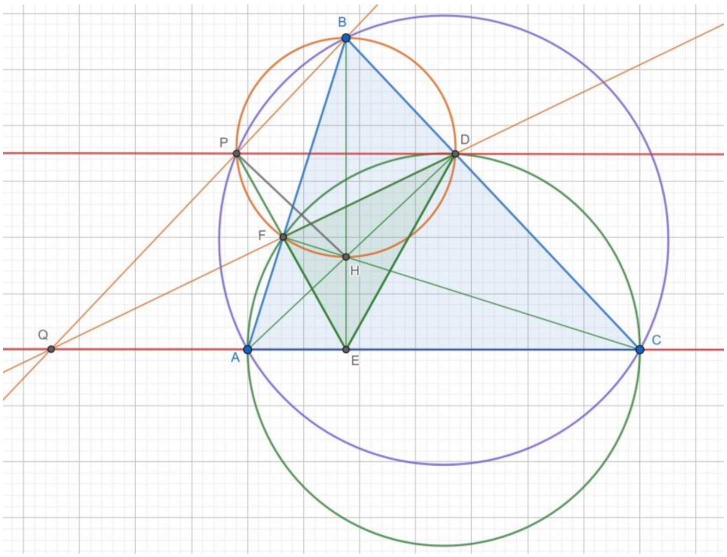
Итак, наибольшее значение равно $\frac{1}{512.}$

*Комментарии.*

| **Критерии** | **Баллы** |
|---|---|
| Получен правильный обоснованный ответ | 7 |
| Правильно записана теорема о средних | 4 |
| Правильно составлено неравенство | 2 |
| Нет решения | 0 |

**11.5.** Дан остроугольный треугольник ABC. Точки D, E и F − основания высот из вершин A, B и C соответственно. Прямая EF и описанная окружность ABC пересекаются в точке P такой, что F находится между E и P. Прямые BP и DF пересекаются в точке Q. Докажите, что если ED = EP, то CQ и DP параллельны.

Решение.




Пусть H − ортоцентр треугольника ABC (точка пересечения его высот), тогда для ортотреуглника FED (треугольник, построенный на основаниях высот) эта точка является точкой пересечения его биссектрис.

Значит, в равнобедренном треугольнике PED биссектриса EH является и высотой. Так как BE перпендикулярна PD и AC, прямые PD и AC − параллельны.

Заметим, что около четырёхугольника AFDC можно описать окружность: ∠AFC = ∠ADC = 900. Назовём её ω1.

Также можно описать окружность около четырёхугольника PBDH. Докажем это. Точка H лежит на биссектрисе, проведённой к основанию равнобедренного треугольника PED, следовательно, HP = HD и ∠PHB = ∠DHB. Для треугольников BPH и BDH с общей стороной BH выполняется равенство по двум сторонам и углу между ними. Значит ∠BDH = ∠BPH = 900, что указывает на вписанность четырёхугольника PBDH.

Из вписанности четырёхугольника AFDC следует равенство углов ∠BFD = ∠ACD. Отметим равенство углов ∠ACD и ∠BHD: ∠BHD дополняет ∠DHE до 1800; в четырёхугольнике EHDC сумма ∠DHE + ∠ACD = 1800, так как ∠HEC = ∠HDC = 900. Таким образом, имеем ∠BFD = ∠ACD = ∠BHD. Отмеченное равенство указывает на принадлежность точки F окружности четырёхугольника PBDH. Назовём эту окружность ω2.

Пусть ω3 − окружность, описанная около треугольника ABC.

Дальнейшее рассуждение 1.

Докажем вписанность четырёхугольника QPFA: ∠QPA = ∠ACB, т.к. APBC вписан в ω3, ∠QFA = ∠ACB, т.к. AFDC вписан в ω1, следовательно ∠QPA =∠QFA. Из вписанности QPFA имеем ∠QPF + ∠QAF = 1800.

∠QPF = ∠BDF (из вписанности PBDF), ∠BDF = ∠FAC (из вписанности AFDC), таким образом, ∠QPF =∠FAC. А так как ∠QPF + ∠QAF = 1800, то и ∠FAC+ ∠QAF = 1800. Это говорит о принадлежности точки Q прямой AC, которая параллельна PD, что и требовалось доказать.

Дальнейшее рассуждение 2.

Прямая PB − радикальная ось окружностей ω3 и ω1, прямая FD − радикальная ось окружностей ω1 и ω2, прямая AC − радикальная ось окружностей ω3 и ω2. Поскольку BP и DF пересекаются в точке Q, то и AC проходит через точку Q. Следовательно, QC и DP параллельны. Что и требовалось доказать.

Критерии

| Оценка | За что ставится |
|---|---|
| 7 | Верное решение |
| 6 | Верное решение с недочётами |
| 4-5 | Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки |
| 3 | Доказана вписанность PBDHF, обнаружена конфигурация трёх окружностей ω1, ω2 и ω3. |
| 2 | Рассмотрены углы, которые в дальнейшем могли бы привести к доказательству вписанности PBDHF |
| 1 | Доказана параллельность PD и AC |
| 0 | Решение неверно или отсутствует |

*Замечание 1. Свойства ортотреугольника считаем известными .*

*Замечание 2. Свойства радикальных осей считаем известными.*