КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/2024 учебный год

9 КЛАСС

9.1. В ансамбле «Классики» выступают 40 танцоров - юноши и девушки. Известно, что среди любых 15 танцоров есть хотя бы одна девушка, а среди любых 27 танцоров есть хотя бы один юноша. Сколько юношей и сколько девушек танцуют в коллективе?

Ответ: 26 девушек, 14 юношей.

Решение.

Пусть x – число девушек, а y – число юношей.

По условию задачи:

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x\le 26 \quad (27-1=26) \\ y\le 14 \quad (15-1=14) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=40-y \\ -y\ge -14 \\ x\le 26 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 40-14 \\ x\le 26 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 26 \\ x\le 26 \end{cases}$$

Таким образом, x = 26 – число девушек, а y = 40 – 26 = 14 – число юношей.

Комментарии

Баллы	Критерии
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Ход решения задачи верный. Правильно составлена система по условию задачи, получена оценка для –y.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца.
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует

9.2. Дано квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, имеющее дискриминант D. Найти корни данного уравнения x_1 и x_2, если известно, что один из корней равен дискриминанту, а второй корень в два раза больше дискриминанта.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$.

Решение.

Пусть $x_1 = D$, $x_2 = 2D$.

По теореме Виета: $q = x_1 \cdot x_2 = 2D^2$, $p = -(x_1 + x_2) = -3D.$

Уравнение можно записать в виде: $x^2 - 3Dx + 2D^2 = 0$.

Дискриминант: $D = (-3D)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2D^2 = D^2 \quad \Rightarrow D = D^2$.

Это возможно только, если D = 0 или D = 1.

Если D = 0, то $x_1 = x_2 = 0$ (не удовлетворяет условию задачи).

Если D = 1, то $x_1 = D = 1$, $x_2 = 2D = 2$.

Комментарии

Баллы	Критерии
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4–5	Ход решения задачи верный. Рассмотрен только один случай дискриминанта.
1–3	Есть продвижение в решении задачи, применена теорема Виета.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.
0	Есть правильный ответ, без решения

9.3. Пусть а = 2023. Найти $\sqrt{a + 24\sqrt{a-144}} - \sqrt{a - 24\sqrt{a-144}}$.

Ответ: 24.

Решение

Пусть $c = \sqrt{a-144}$, тогда $c^2 = a - 144$ и $c^2 + 144 = a.$

Тогда будем иметь

$$\sqrt{a + 24\sqrt{a-144}} - \sqrt{a - 24\sqrt{a-144}} = \sqrt{c^2 + 144 + 24c} - \sqrt{c^2 + 144 - 24c} =$$
$$= \sqrt{(c+12)^2} - \sqrt{(c-12)^2} = |c+12| - |c-12|$$

При а = 2023, очевидно, что $c = \sqrt{x-144} > 12.$

Поэтому $\sqrt{a + 24\sqrt{a-144}} - \sqrt{a - 24\sqrt{a-144}} = c + 12 - c + 12 = 24.$

Комментарии

Баллы	Критерии
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4–5	Ход решения задачи верный. Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца. Выделены полные квадраты в подкоренных выражениях.
1	Есть продвижение в решении задачи,
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует

9.4. Известно, что $\frac{x^2y^2}{x^4-2y^4}=1$ (x, y – некоторые числа). Укажите все возможные значения, которые может принимать выражение $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение:

Выражение $\frac{x^2y^2}{x^4-2y^4}$ имеет смысл при условии $x^4-2y^4\neq 0$.

$$\frac{x^2y^2}{x^4-2y^4}=1$$

$$x^2y^2=x^4-2y^4$$

$$x^4-x^2y^2-2y^4=0$$

$$(x^4-y^4)-(x^2y^2+y^4)=0$$

$$(x^2-y^2)(x^2+y^2)-y^2(x^2+y^2)=0$$

$$(x^2+y^2)(x^2-2y^2)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=0 \\ x^2-2y^2=0 \end{array}\right.$$

1) $x^2+y^2=0$ или $x^2=-y^2$. Данному условию удовлетворяют только x = y = 0, но они не удовлетворяют ограничению $x^4-2y^4\neq 0$.

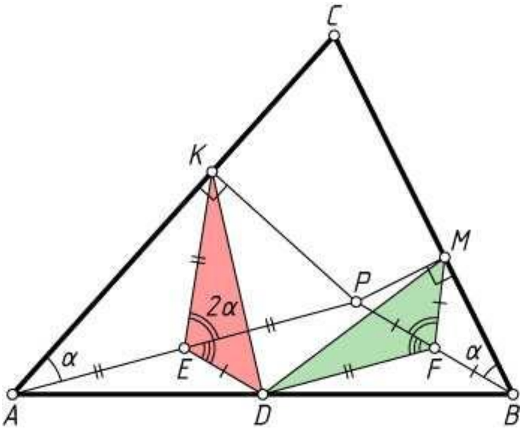
2) $x^2-2y^2=0$ или $x^2=2y^2$. Ненулевые числа x и y, удовлетворяющие этому условию, так же удовлетворяют ограничению $x^4-2y^4\neq 0$.

Тогда $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{2y^2-y^2}{2y^2+y^2}=\dfrac{y^2}{3y^2}=\dfrac{1}{3}.$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Ход решения задачи верный. Получено разложение на множители $(x^2+y^2)(x^2-2y^2)$.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги.
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует

9.5. Точка D делит пополам сторону AB треугольника ABC. Точка P, принадлежащая плоскости треугольника ABC такова, что выполняется равенство углов ∠CAP = ∠CBP. Точка M принадлежит стороне BC, точка K − стороне AC, ∠PMB = ∠PKA = 90^0. Докажите равенство длин отрезков KD и MD.



Доказательство. Пусть ∠PAC = ∠PBC = α. Если E и F − середины AP и BP соответственно, то ∠KEP = ∠MFP = 2α. Поскольку DE и DF − средние линии треугольника APB, то DEPF − параллелограмм, а так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы , то

$KE = EP = DF$ и $ED = FP = FM$,

$\angle KED = 2\alpha + \angle PED = 2\alpha + \angle PFD = \angle MFD$.

Поэтому треугольники KED и DFM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $DK = DM$.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Верное решение	7
Верное решение с недочётами	6
Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки	4-5
Найден параллелограмм *DEPF*	3
Решение в целом неверно, но содержит более или менее существенное продвижение в верном направлении (построены средние линии треугольника *APB*, упомянуты свойства медиан прямоугольного треугольника, указано равенство углов $\angle KEP = \angle MFP = 2\alpha$)	1-2
Решение неверно или отсутствует	0