ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП)

возрастная группа (10 класс)

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий –235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задания;

– не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;

– решение каждой задачи начинайте с новой страницы;

– задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);

– после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

Класс. 10.

Условие задачи 10.1.

Найти произведение $\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Условие задачи 10.2.

Чтобы поздравить учителя с наступающим праздником осени, ребята подготовили прямоугольный лист и разделили его на части следующим образом: внутри отметили 14 точек, затем эти точки соединили непересекающимися отрезками друг с другом и с углами листа. В каждом образовавшемся треугольнике учащиеся написали поздравления. Сколько всего получилось пожеланий?

Условие задачи 10.3.

Дан многочлен ax^3-ax^2+bx+b с коэффициентами a≠0, b≠0, Для корней x_1, x_2, x_3 справедливо равенство $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$. Докажите это.

Условие задачи 10.4.

У пирата Билла есть восемь неполных (недопитых) бутылок воды. Билл может взять любые две бутылки, перелить часть воды из одной бутылки в другую, и уравнять в них количество воды. Докажите, что, поступая таким образом, Билл сможет добиться того, чтобы во всех его недопитых бутылках стало одинаковое количество воды.

Условие задачи 10.5.

Вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_C касается стороны AB в точке C_0, а продолжения стороны CA − в точке B_1. Вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_B касается стороны AC в точке B_0, а продолжения стороны BA − в точке C_1. Прямые I_CB_1 и I_BC_1 пересекаются в точке P. Докажите, что прямые AP и C_0B_0 перпендикулярны.

(**Вневписанной окружностью** треугольника называется окружность, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)