ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ

КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2022/2023 учебный год

7 класс

7 КЛАСС

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Задача 1. Винни Пух, Пятачок и ослик Иа-Иа играют в шашки на вылет, т.е. играют двое, а третий в это время ждет. Победивший начинает партию с ожидающим, а проигравший становится ждущим. Винни Пух участвовал в двенадцати партиях, Пятачок участвовал в семи, а ослик Иа-Иа в одиннадцати. Сколько раз медведь выиграл у кабана?

Ответ. 4

Решение. Найдем общее количество сыгранных партий: Винни Пух участвовал в двенадцати партиях, Пятачок участвовал в семи, а ослик Иа-Иа в одиннадцати:

$$n = \frac{12+7+11}{2} = 15.$$

Делаем выводы:

Винни Пух не участвовал в 15-12=3 партиях,

Пятачок не участвовал в 15-7=8 партиях,

ослик Иа-Иа не участвовал в 15-11=4 партиях.

При игре на вылет один игрок не может подряд пропустить две партии, следовательно Пятачок был «ждуном» в самой первой партии, т.к. он не участвовал в 8 из 15 партий, а затем пропускал каждую вторую партию, т.е. проиграл все свои партии.

Число побед Винни Пуха над Пятачком равно количеству их встреч, которое можно найти как разность между общим количеством партий (15) и числом партий, в которых участвовал ослик Иа-Иа (11): 15-11=4.

Комментарий.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Найдено, что Пятачок все партии проиграл.	3
Доказано, что в первой партии Пятачок не участвовал.	2
Найдено общее количество партий	1
Нет решения	0

Задача 2. Мама кошка принесла своим котятам Коржику, Карамельке и Компоту три пирожка с разными начинками: один – с колбасой, один с сыром и один с вареньем. Коржик и Карамелька закричали, что они получили пирожки с колбасой, Компот сказал, что у него – с сыром. Мама еще раз принесла три пирожка с теми же разными начинками. В этот раз Коржик

сказал, что у него опять пирожок с колбасой, а Карамелька и Компот утверждали, что у них пирожки с сыром. Мама кошка знала, что каждый котенок оба раза получал пирожки с разными начинками и каждый раз ровно один котенок говорил неправду. Определите какой пирожок не ел Коржик, какой – Карамелька и какой Компот.

Ответ. Коржик не ел пирожок с сыром, Карамелька не ела пирожок с вареньем, а Компот – с колбасой.

Решение. Составим таблицу

	Коржик	**Карамелька**	**Компот**
Первая партия пирожков	С колбасой	С колбасой	С сыром
Вторая партия пирожков	С колбасой	С сыром	С сыром

Коржик и Компот оба раза называли пирожки с одинаковыми начинками, а доставались им разные, значит именно они обманывали по одному разу. Следовательно, Карамелька оба раза говорила правду: первый раз ей достался пирожок с колбасой, а второй раз – с сыром. Ей не достался пирожок с вареньем.

Коржик утверждал, что в первый раз у него был пирожок с колбасой, но этот пирожок был у Карамельки, т.е. первый раз неправду сказал Коржик (Карамелька и Компот сказали правду), а во второй раз соврал Компот, т.к. пирожок с сыром был у Карамельки, которая ни разу не обманула. Составим новую таблицу с учетом полученной информации:

	Коржик	**Карамелька**	**Компот**
Первая партия пирожков	С колбасой С вареньем	С колбасой	С сыром
Вторая партия пирожков	С колбасой	С сыром	С сыром С вареньем
Не ели	С сыром	С вареньем	С колбасой

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Доказано, что в первый раз неправду говорил Коржик, а во второй – Компот.	3
Сделан вывод, что Карамелька оба раза говорила правду и найден только один правильный ответ	2
Нет решения	0

Задача 3. Даны два натуральных числа x и y, причем справедливо равенство:

$$x^2 - 3x = 25y^2 - 15y$$

Какое из этих чисел больше и во сколько раз?

Ответ. x в пять раз больше y.

Решение. Исходное равенство равносильно следующему равенству:

$$25y^2 - x^2 - 15y + 3x = 0$$

$$(5y - x)(5y + x) - 3(5y - x) = 0$$

$$(5y-x)(5y+x-3)=0$$

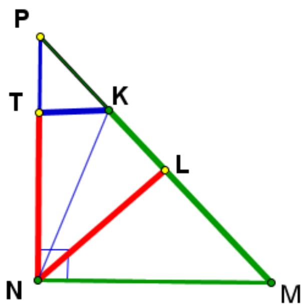
Т.к. $x,y\in N$, то $x,y\geq 1$, поэтому выражение $5y+x-3\geq 3$ и не может равняться нулю. Поэтому остается только один вариант: $5y-x=0$, т.е. x=5y: x в пять раз больше y.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Получено равенство $(5y-1,5)^2=(x-1,5)^2$, сделан вывод $5y-1,5=x-1,5$, но второй случай $5y-1,5=-(x-1,5)$ не рассмотрен.	5
Из равенств $(5y-x)(5y+x-3)=0$ получен ответ, но нет объяснения почему $5y+x-3\neq 0$	5
Рассмотрен пример конкретных чисел	1
Приведен только ответ без объяснений. Нет решения	0

Задача 4. Дан треугольник MNP, в котором MN = NP и $\angle MNP=90°$. В нём проведена высота NL. На стороне PM выбрана точка K так, что MK = MN. На стороне PN выбрана точка T так, что NT = NL. Доказать, что прямые KT и MN параллельны.

Решение.



Докажем, что NK — биссектриса угла LNP. Действительно,

$\angle LNK=180°-\angle NLK-\angle LKN$ по теореме о сумме углов треугольника

$\angle LNK=90°-\angle MKN$ так как NL высота

$\angle LNK=90°-\angle MNK$ по свойству равнобедренного треугольника MNK)

$\angle LNK=\angle MNP-\angle MNK$ так как $\angle MNP$ – прямой

Вывод: $\angle LNK=\angle PNK$, NK — биссектриса угла LNP

Значит, треугольники LNK и TNK равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle NTK=\angle NLK=90°=\angle MNP$. По признаку параллельности получаем $KT \parallel MN$.

Комментарии.

Критерии	Балл
Приведено полное доказательство	7
Доказано, что NK биссектриса, другие продвижения отсутствуют.	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Задача 5. Шесть белок спрятали в глубоком дупле орехи на зиму. В октябре первая белка забралась в дупло, разделила все орехи на 6 равных частей, один орех оказался лишним и она его съела, а после этого унесла свою часть в свое дупло. То же самое сделали остальные белки в ноябре, декабре, январе, феврале и в марте. А в апреле в это дупло залетела сорока. Какое наименьшее число орехов она там обнаружила?

Ответ. 15620 орехов

Решение. Можно заметить, что после посещеня белок число орехов делится на 5. Пусть сорока нашла n орехов, тогда n= 5a. Значит, шестая белка нашла 6a+1 орехов, что также делится на 5, значит, a = 5b-1, то есть 6a + 1 = 5(6b -1).

Пятая белка нашла $6(6b-1)+1=6^2b-5$. При этом 6^2b-5 делится на 5, откуда b делится на 5, то есть b = 5c, $6^2b-5=5(6c^2-1)$.

Продолжая таким образом, получаем, что вторая белка нашла $6(6^4e-1)+1=6^5e-5$ При этом e делится на 5, то есть $e=5f, \quad 6^5e-5=5(6^5f-1)$.

Первая белка нашла 6^6f-5.

Получаем, что $b=5c=...=5^4f$. Тогда $n=5a=5(5b-1)=5^6f-5$. Т.к.

$f\geq 1, \quad b\geq 5^6-5=15620$

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Приведено полное доказательство	7
Есть правильная идея рассмотрения последовательных делимостей и роста степеней пятёрки	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0