

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО
МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

возрастная группа 11 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания. Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Задача 1.

Найти произведение $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$.

Задача 2.

Доказать, что для любого простого числа p существует бесконечно много чисел вида $2^n - 1$ (где $n \in \mathbb{N}$), делящихся на p .

Задача 3.

Два игрока играют в игру «Бриллиантики», в которой имеются четыре шкатулки с драгоценными камнями. В первой шкатулке лежат три бриллианта, во второй – пять бриллиантов, в третьей – 7 бриллиантов, а в четвертой шкатулке – девять бриллиантов. Игроки делают каждый свой ход по очереди. За один ход можно либо взять один бриллиант из любой шкатулки, либо взять по одному бриллианту из любых двух шкатулок. Проигрывает тот, кто уже не сможет сделать ход. Кто может выиграть в игре «Бриллиантики» независимо от ходов соперника?

Задача 4.

Найти остаток от деления многочлена $f(x) = x^{2022} + x^{2021} + x^{2020} + \dots + x^2 + x + 1$ на $x^2 - 1$.

Задача 5.

Дан треугольник MNK , причем известно, что угол при вершине K в два раза меньше угла при вершине M . Через вершину N к окружности, описанной около треугольника MNK , проведена касательная. Расстояния до этой касательной от точек K и M соответственно равны 9 и 4. Найдите радиус окружности.