ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ

КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2022/2023 учебный год

8 класс

8 КЛАСС

Задача 1. Через точку $M(3;2)$ проходят три прямые, заданные уравнениями:

$$y = ax + b,\ y = bx + c,\ y = cx + a.$$

Найти значения параметров a, b и c.

Ответ. $a = b = c = 1/2$.

Решение. $M(3;2) \Rightarrow x = 3,\ y = 2$

Подставим x и y в уравнения прямых и получим систему: $\begin{cases} 3a + b = 2, \\ 3b + c = 2, \\ 3c + a = 2. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на (–3): $\begin{cases} -9a - 3b = -6, \\ 3b + c = 2, \\ 3c + a = 2. \end{cases}$

Сложим первое и второе уравнения системы: $\begin{cases} -9a + c = -4, \\ 3c + a = 2. \end{cases}$

Умножим второе уравнение на 9: $\begin{cases} -9a + c = -4, \\ 27c + 9a = 18. \end{cases}$

Отсюда $28c = 14$, $\boldsymbol{c = 1/2}$.

Если $c = 1/2$, то $½ + 3b = 2$ и $\boldsymbol{b = 1/2}$. Аналогично, $½ + 3a = 2$ и $\boldsymbol{a = 1/2}$.

Комментарии.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
3–5	Ход решения задачи верный, но имеются вычислительные погрешности при решении соответствующей системы уравнений (в зависимости от количества погрешностей).
1–2	Есть продвижение в решении задачи, правильно составлена система уравнений.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.
0	Есть правильный ответ, без решения

Задача 2. Дана дробь $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}$**.** Освободиться от иррациональности в знаменателе.

Ответ. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на 2:

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)}=\frac{1+2\sqrt{3}+3}{2(\underline{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\underline{\sqrt{3}}-1)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Комментарии.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4–5	Ход решения задачи верный. Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги, выделен полный квадрат в числителе (или разложен на множители знаменатель)
1	Есть продвижение в решении задачи,
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует
0	Есть правильный ответ, без решения

Задача 3. Решить в целых числах уравнение $xy^2=1+7x+7y^2$.

Ответ. (32, –3), (32, 3).

Решение. $xy^2-7x=1+7y^2$

$$x\left(y^2-7\right)=7y^2+1$$

$$x=\frac{7y^2+1}{y^2-7}\quad\Bigg|\quad\frac{7y^2-49+49+1}{y^2-7}=\frac{7\left(y^2-7\right)+50}{y^2-7}=7+\frac{50}{y^2-7}$$

$$x = 7 + \frac{50}{y^2 - 7}$$

Так как $x \in Z$, то 50 делится на $y^2 - 7$. Следовательно, $y^2 - 7$ может принимать значения: ±1, ±2, ±5, ±10, ±25, ±50.

1) $y^2 - 7 = 1$ $y^2 = 8$ Целых решений нет	5) $y^2 - 7 = 5$ $y^2 = 12$ Целых решений нет	9) $y^2 - 7 = 25$ $y^2 = 32$ Целых решений нет
2) $y^2 - 7 = -1$ $y^2 = 6$ Целых решений нет	6) $y^2 - 7 = -5$ $y^2 = 2$ Целых решений нет	10) $y^2 - 7 = -25$ $y^2 = -18$ Решений нет
3) $y^2 - 7 = 2$ $y^2 = 9$ $\boldsymbol{y = \pm 3}$	7) $y^2 - 7 = 10$ $y^2 = 17$ Целых решений нет	11) $y^2 - 7 = 50$ $y^2 = 57$ Целых решений нет
4) $y^2 - 7 = -2$ $y^2 = 5$ Целых решений нет	8) $y^2 - 7 = -10$ $y^2 = -3$ Решений нет	12) $y^2 - 7 = -50$ $y^2 = -43$ Решений нет

Если $y = \pm 3$, то $x = 7 + \frac{50}{9 - 7} = 7 + 25 = 32.$

Комментарии.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
4–5	Ход решения задачи верный. Сделан правильный вывод о делимости 50 на $y^2 - 7$. Рассмотрены не все случаи возможных значений $y^2 - 7$.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца. Получено выражение для переменной x.
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует
0	Есть правильный ответ, без решения

Задача 4. В апреле некоторого года любитель компьютерных игр Матвей играл по следующей схеме: каждый понедельник он играл один раз, каждый вторник – два раза, …, каждую пятницу – пять раз. По выходным (в субботу и в воскресенье) Матвей не играл по причине контроля родителей. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь Матвей сыграл ровно 64 раза? Учесть, что в апреле 30 дней.

Ответ. Не могло

Решение. Предположим, что Матвей сыграл за апрель ровно 64 раза. Заметим, что апрель содержит четыре полные недели и еще два подряд идущих дня. За одну полную неделю Матвей сыграл $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ раз. Таким образом, за четыре недели он сыграл ровно 60 раз, а за два подряд идущих дня – 4 раза. Но если среди этих двух дней есть выходной, то оставшийся день – понедельник или пятница, что не подходит. Если же оба дня будние, то Матвей должен был сыграть нечетное число раз ($1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 4 = 7$, $4 + 5 = 9$), что так же не подходит.

Имеем противоречие.

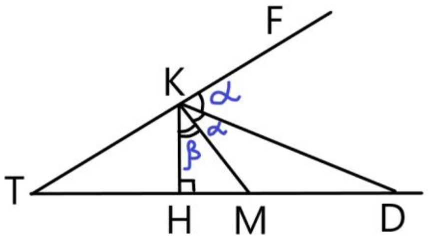
Вывод: Матвей не мог за апрель сыграть ровно 64 раза по указанной схеме.

Комментарии.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
4–5	Ход решения задачи верный. Учтены все игры за полные недели месяца.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца.
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует
0	Есть правильный ответ, без решения

Задача 5. В треугольнике KMT из вершины K опущена высота KH. KD – биссектриса внешнего угла при вершине K. Известно, что KH в два раза меньше KD. Доказать, что в треугольнике KMT: $\angle M - \angle T = 60^0$.

Решение.



1. Пусть $KH = x$, тогда $KD = 2x$.
2. В прямоугольном треугольнике KHD: $KH = ½\ KD \Rightarrow \angle D = 30^0$.
3. В треугольнике KHD: $\angle DKH = 90^0 - 30^0 = 60^0$ (по свойству прямоугольного треугольника).
4. Пусть $\angle FKD = \angle MKD = \alpha$, $\angle HKM = \beta$.
5. $\angle DKH = \alpha + \beta = 60^0$, $\angle M = 90^0 - \beta$.
6. $\angle TKH = 180^0 - (2\alpha + \beta)$ (по свойству смежных углов).
7. $\angle T = 90^0 - \angle TKH = 90^0 - 180^0 + (2\alpha + \beta) = -90^0 + 2\alpha + \beta$.
8. $\angle M - \angle T = (90^0 - \beta) - (-90^0 + 2\alpha + \beta) = 90^0 - \beta + 90^0 - 2\alpha - \beta =$
   $= 180^0 - 2\alpha - 2\beta = 180^0 - 2(\alpha + \beta) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Ч.т.д.

Комментарии.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5	Ход решения задачи верный. Найдены выражения $\angle M$ и $\angle T$ через α и β.
4	Ход решения задачи верный. Доказано, что $\angle DKH = 60^0$.
2–3	Правильно сделаны начальные шаги, но решение задачи не доведено до логического конца.
1	Есть продвижение в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует