ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ

КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2022/2023 учебный год

9 класс

9 КЛАСС

Задача 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + xy + y = \mathbf{2 + 3\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = \mathbf{6} \end{cases}$

Ответ. $x_1=2$, $y_1 = \sqrt{\mathbf{2}}$ и $x_2 = \sqrt{\mathbf{2}}$, $y_2 = 2$

Решение. Умножив первое уравнение на 2 и сложив его со вторым, получаем для любого решения системы

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2(x+y) = (x+y)^2 + 2(x+y) = 10 + 6\sqrt{2},$$

т.е. $(x + y + 1)^2 = (3 + \sqrt{2})^2$, а значит $x+y+1 = \pm(3+\sqrt{2})$.

Если $x + y = -4 - \sqrt{2}$, то $xy = 6+4\sqrt{2}$ и $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = \left(4+\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(6 + 4\sqrt{2}\right) = -6 - 8\sqrt{2} < 0$, что невозможно. Следовательно, $x + y = 2 + \sqrt{2}, xy = 2\sqrt{2}$, откуда получаем две пары $x_1=2$, $y_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = 2$, каждая из которых (как показывает проверка) удовлетворяет исходной системе.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Найдено $x + y = 2 + \sqrt{2}, xy = 2\sqrt{2}$	4
Найдено $x+y+1 = \pm(3+\sqrt{2})$.	2
Подобрано решение	1
Нет решения	0

Задача 2. Сравнить числа 0 и $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$.

Ответ. $0 = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$.

Решение. Воспользуемся теоремой: Для любых значений $a, b \in R$ и $n \in N$ справедливо равенство:

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, при $a \geq \sqrt{b}, b > 0,$ получаем

$\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} = \left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right) - \left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right) - \sqrt{2} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} = 0$, т.е. заданные числа равны.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Ход решения задачи верный, но имеются вычислительные погрешности при решении соответствующей системы уравнений	4
Есть продвижение в решении задачи, правильно записана теорема	2
Нет решения	0

Задача 3. Решить уравнение $2^x + 1 = y^2$ в натуральных числах.

Ответ. (3,3)

Решение. Перепишем уравнение в виде $2^x = (y - 1)(y + 1)$, тогда для искомых значений $x, y \in N$ имеем, что числа $y - 1$, $y + 1 \in Z^+$ являются делителями числа 2^x, т.е. $y-1=2^p$ и $y+1=2^q$, где $p, q \in Z^+$, $p<q$. Поэтому

$2^q - 2^p = (y+1) - (y-1) = 2$, т.е. $2^p(2^{q-p} - 1) = 2$

Заметим, что $q - p \leq 1$“ (иначе нечетное число $2^{q-p} - 1 > 1$ было бы делителем числа 2), поэтому $q = p+1$ и $2^p(2 - 1) = 2$, т.е. $p=1$, $q=2$

Проверка показывает, что единственно возможное значение $y=3$ удовлетворяет уравнению только при $x=3$

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Доказано, что $2^p(2^{q-p} - 1) = 2$	4
Доказано, что $y-1=2^p$ и $y+1=2^q$	2
Подобрано решение	1
Нет решения	0

Задача 4. В университете любые два корпуса связаны друг с другом непосредственно одним из следующих типов кабеля: витая пара, коаксиальный, оптоволоконный. Известно, что не существует корпуса, обеспеченного всеми тремя типами кабеля, и в то же время не существует таких трех корпусов, любые два из которых связаны одним и тем же типом кабеля. Найти наибольшее возможное количество корпусов в этом университете.

Ответ. 4

Решение. Предположим, что существует пять корпусов, связанных указанным способом. Пусть корпус A соединен с корпусами B, C и D, например, оптоволокном. Тогда по условию ни одна пара из корпусов B, C и D не может быть соединена оптоволокном. Пусть B и C соединены, например, коаксиальным кабелем. Корпуса C и D не могут быть соединены витой парой, так как иначе корпус C имел бы все три типа кабеля. Поэтому C и D соединены коаксиальным кабелем. По тем же причинам корпуса B и D также соединены коаксиальным кабелем. Получили, что B, C и D попарно соединены коаксиальным кабелем. Противоречие. Итак, из каждого корпуса выходит две линии связи одного типа кабеля и две линии связи некоторого другого типа кабеля. Тогда каждый корпус соединен ровно двумя типами кабеля. Поэтому хотя бы один тип кабеля соединяет не более чем три корпуса (иначе всего корпусов было бы не менее чем 4·3/2=64·3/2=6). Если он соединяет ровно два корпуса, то из каждого из этих корпусов выходит только одна линия связи такого типа кабеля, что невозможно. Если же он соединяет ровно три корпуса, то они должны быть соединены попарно этим типом кабеля, что также невозможно. Таким образом, мы доказали, что для пяти корпусов условие задачи невыполнимо. Тем более оно невыполнимо для большего числа корпусов. Если же рассмотреть четыре корпуса A, B, C и D, которые связаны следующим образом: A с B коаксиальным кабелем, C с D витой парой, а все остальные пары оптоволокном, то все -условия задачи будут выполнены. Следовательно, наибольшее число корпусов равно 4.

Комментарии.

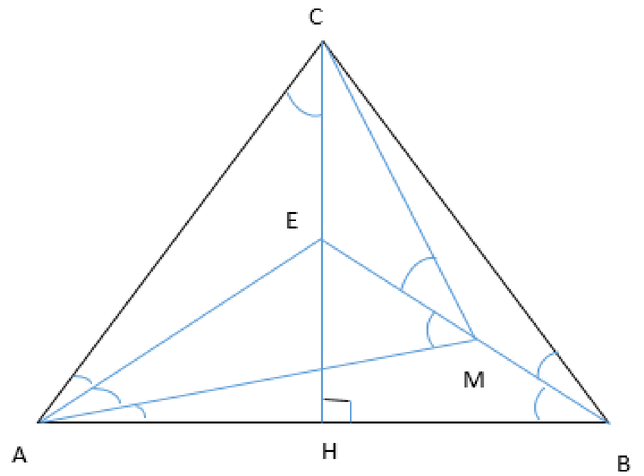
Критерии	**Баллы**

Получен правильный обоснованный ответ	7
Ход решения задачи верный. Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений	4
Правильно сделаны начальные шаги	2
Нет решения	0

Задача 5. Внутри треугольника ABC взята точка M, для которой $\angle MBA = 30^0$, $\angle MAB = 10^0$. Найти $\angle AMC$, если $\angle ACB = 80^0$ и AC = BC.

Ответ. $\mathbf{70^0}$

Решение.



Пусть высота CH треугольника ABC пересекается с прямой BM в точке E. Тогда AE=BE и

$$\angle EAM = \angle EAB - \angle MAB = 30^0 - 10^0 = 20^0$$

$$\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB = 40^0$$

$$\angle EAC = \angle CAH - \angle EAB = (90^0 - 40^0) - 30^0 = 20^0$$

$$\angle AME = \angle MAB + \angle MBA = 10^0 + 30^0 = 40^0,$$

а значит треугольники AME и ACE равны по общей стороне и двум углам. Поэтому AM = AC, $\angle AMC = \angle ACM - \angle MAB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle CAM) = 70^0$.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Доказано равенство треугольников AME и ACE	4
Найден угол ACE	2
Найден угол EAM	1
Нет решения	0