ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ

КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2022/2023 учебный год

10 класс

10 КЛАСС

Задача 1. Вычислить $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$

Ответ. 3

Решение. Пусть $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$ =A.

Возведём в куб обе части этого равенства. Получим:

$$6+\sqrt{\frac{847}{27}}+3\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}+3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2+6-\sqrt{\frac{847}{27}}=A^3.$$

Отсюда, 12+3$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}A=A^3$.

Заметим, что $3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3\sqrt[3]{36-\frac{847}{27}}=\sqrt[3]{36\cdot 27-847}=\sqrt[3]{125}=5$.

Следовательно, $A^3-5A-12=0$.

Но $A^3-5A-12=A^3-3A^2+3A^2-9A+4A-12=(A-3)(A^2+3A+4)$.

Значит, $(A-3)(A^2+3A+4)=0$. $A^2+3A+4\neq 0$. Таким образом, A=3 является единственным решением уравнения $(A-3)(A^2+3A+4)=0$.

Итак, $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$ =3.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Получено $A^3 - 5A - 12 = 0$	3
Правильно возвели в куб	2
Нет решения	0

Задача 2. На факультет от выпускников этого года подано на 600 заявлений больше, чем от выпускников прошлых лет. Девушек среди выпускников этого года в 5 раз больше, чем девушек среди выпускников прошлых лет. А юношей среди выпускников этого года больше, чем юношей среди выпускников прошлых лет, в n раз $(6\le n\le 12, \mathrm{n}\in \mathrm{N})$. Определить общее число заявлений, если среди выпускников прошлых лет юношей на 20 больше, чем девушек.

Ответ. 832

Решение. Пусть от выпускников этого года подано x заявлений от юношей и y заявлений от девушек, а от выпускников прошлых лет подано z заявлений от юношей и v заявлений от девушек.

Тогда $\begin{cases} x+y=z+v+600 \\ y=5v \\ x=nz \\ z=v+20 \end{cases}$, где $6 \le n \le 12$.

Так как $x+y+z+v=n(v+20)+5v+v+20+v=(n+7)v+20n+20$, то для решения задачи достаточно найти n и v.

$n(v+20)+5v=v+20+v+600$.Следовательно, $(n+3)v=620-20n$.

Отсюда, $v=\dfrac{620-20n}{n+3}=\dfrac{620+60-60-20n}{n+3}=\dfrac{680}{n+3}-20$. По условию задачи $v \in N$. Значит, $9 \le$n+3 ≤ 15является делителем числа 680. Среди чисел 9,10,11,12,13,14,15 это только число 10. Следовательно, n+3=10. Таким образом, n=7 и v=48.

Отсюда, $x+y+z+v=(7+7)48+20\cdot 7+20=672+140+20=832$.

Значит, на факультет подано 832 заявления.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно определены n и v	4
Правильно составлена система, но решение не найдено	2
Нет решения	0

Задача 3. Построить график функции $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}+\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}+\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

Решение.

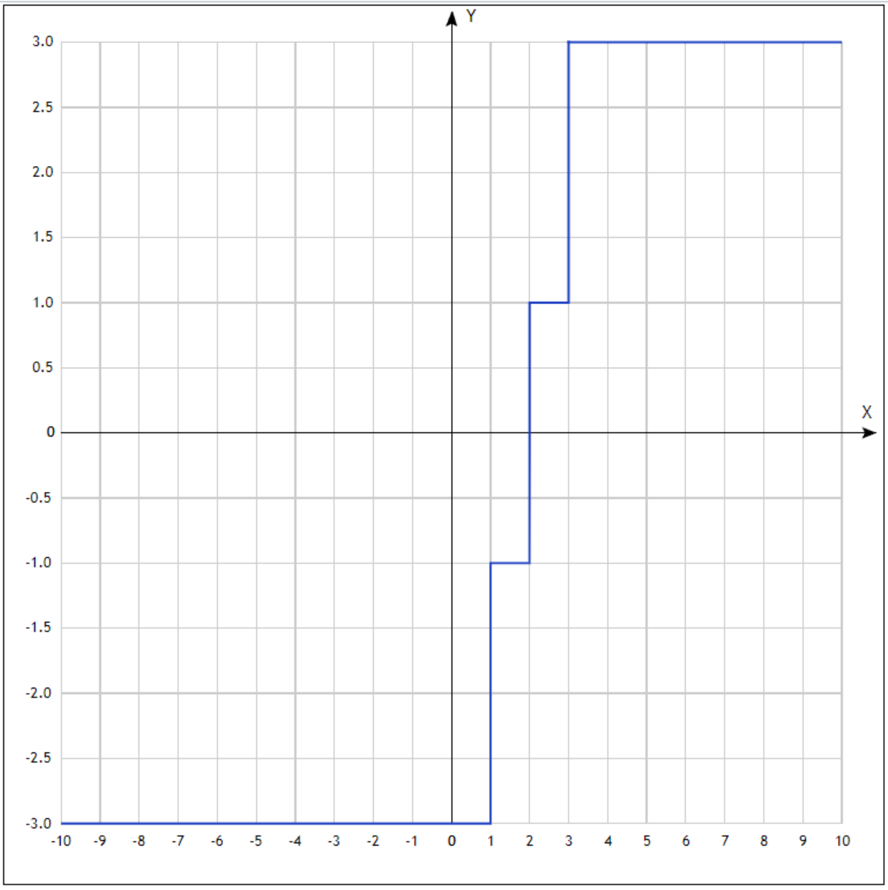
Заметим, что

$\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=\dfrac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases} -1, \text{при } x<1 \\ 1, \text{при } x>1 \end{cases}$. Аналогично, $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}=\begin{cases} -1 \text{при } x<2 \\ 1 \text{ при } x>2 \end{cases}$ и

$\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\begin{cases} -1 \text{при} x<3 \\ 1 \text{при} x>3 \end{cases}$.

Следовательно, $y=\begin{cases} -3 \text{при} x<1 \\ -1 \text{при} 1<x<2 \\ 1 \text{при} 2<x<3 \\ 3 \text{при} x>3 \end{cases}$.

Таким образом, теперь легко построить график исходной функции



Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно представлен алгоритм решения, но нет построения	3
Представлен правильный чертеж, но нет решения	2
Нет решения	0

Задача 4. Дан треугольник ABC. Определить на плоскости множество таких точек M, что площади треугольников ABM и BMC равны

Ответ. искомое место точек состоит из всех не совпадающих с B точек объединения двух прямых, прямой, проходящей через B параллельно AC, и прямой, содержащей медиану BD треугольника ABC.

Решение. У треугольников ABM и BMC общая сторона BM. Значит, площади их равны, если равны высоты, опущенные на прямую BM. Таким образом, нам надо найти такое множество точек M, что расстояние от точки A до прямой BM равно расстоянию от точки C до прямой BM

Возможны два случая: прямая BM параллельна прямой AC или прямые AC и BM пересекаются.

1. Если через точку B провести прямую параллельную прямой AC, то для любой точки M на этой прямой расстояния до прямой BM от точек A и C равны. Таким образом, вся эта прямая (кроме точки B, ибо тогда бессмысленно говорить о треугольнике ABM) принадлежит искомому множеству точек.

2. Пусть прямая BM пересекается с прямой AC в точке D, и отрезки CC_1, AA_1- перпендикуляры,

опущенные из точек C и A на прямую BM. Эти перпендикуляры по предположению равны. Если точки A и C лежат по одну сторону от прямой BM, то из $CC_1 = AA_1$ следует, что AC параллельно BM - противоречие. Значит, точки A и C лежат по разные стороны от прямой BM и точка D принадлежит интервалу AC. Прямоугольные треугольники AA_1D и CC_1D равны по катету и острому углу, так что AD=DC. Значит, точки искомого множества лежат на прямой, содержащей точку B и середину отрезка AC.

Все точки этой прямой находятся на одинаковом расстоянии от точек A и C, так как это следует из равенства треугольников AA_1D и CC_1D по гипотенузе (AD=DC) и острому углу $(\angle ADA_1 = \angle CDC_1)$.

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Рассмотрен один из случаев	3
Рассмотрен частный случай	1
Нет решения	0

Задача 5. При каких a и b система уравнений

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b^2 \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$ имеет бесконечно много решений?

Ответ. Ответ: $a = \pm 1, \mathrm{b} = \text{-}1,\text{-}2.$

Решение. При b=0 второе уравнение (а значит, и система) решений не имеет. Следовательно, можно считать, что $b \neq 0$ и поделить первое уравнение системы на b, а второе – на b^2.

Получим: $$\begin{cases} y = \dfrac{a^2}{b}x - \dfrac{a^2}{b} + 1 \\ y = \dfrac{1}{b}x - \dfrac{4}{b} - \dfrac{2}{b^2} \end{cases}.$$

Каждое из уравнений получившейся системы задаёт прямую. Система имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда эти прямые совпадают. А это в свою очередь имеет место, если и только если

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{b} = \dfrac{1}{b} \\ -\dfrac{a^2}{b} + 1 = -\dfrac{4}{b} - \dfrac{2}{b^2} \end{cases}.$$

Последняя система имеет решения $a = \pm 1, \mathrm{b} = \text{-}1,\text{-}2.$

Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно определено, что прямые совпадают	3
Рассмотрен частный случай	2
Нет решения	0