ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ

КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2022/2023 учебный год

11 класс

11 КЛАСС

Задача 1. Найти произведение

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{a^2}\right).$$

Ответ. $\frac{a+1}{2a}$

Решение. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\frac{1}{4}=\frac{2^2-1}{4}=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{2+1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} \\ 1-\frac{1}{9}=\frac{3^2-1}{9}=\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} \\ 1-\frac{1}{16}=\frac{4^2-1}{16}=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4+1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1-\frac{1}{a^2}=\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a+1}{a} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Перемножив все равенства (1), получаем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a+1}{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a}=\frac{a+1}{2a}.$$

Комментарии.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
3–5	Ход решения задачи верный, но не до конца представлены разложения на множители скобок.
1–2	Есть продвижение в решении задачи, каждая скобка приведена к общему знаменателю, числители полученных дробей представлены в виде соответствующих разностей.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

0	Решение отсутствует.
0	Есть правильный ответ, без решения

Задача 2. Доказать, что для любого простого числа p существует бесконечно много чисел вида 2^n-n (где n ϵ N), делящихся на p.

Решение. Если p = 2, то каждое из чисел $2^{(2к)}$-(2к), где к ϵ N, делится на p. Пусть p>2, тогда, учитывая малую теорему Ферма, получаем

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, $2^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod p$, m ϵ N,

Если же $m \equiv -1 \pmod p$, то имеем

$2^{m(p-1)} – m(p-1) = 2^{m(p-1)} + m – mp \equiv 0 \pmod p$,

Таким образом, если p>2, то каждое из чисел

2^n – n, где n = (kp - 1)(p-1), k ϵ N, делится на p.

Комментарии.

Критерии	Баллы
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно применена малая теорема Ферма	3
Рассмотрен частный случай	2
Нет решения	0

Задача 3. Два игрока играют в игру «Бриллиантики», в которой имеются четыре шкатулки с драгоценными камнями. В первой шкатулке лежат три бриллианта, во второй – пять бриллиантов, в третьей – 7 бриллиантов, а в четвертой шкатулке – девять бриллиантов. Игроки делают каждый свой ход по очереди. За один ход можно либо взять один бриллиант из любой шкатулки, либо взять по одному бриллианту из любых двух шкатулок. Проигрывает тот, кто уже не сможет сделать ход. Кто может выиграть в игре «Бриллиантики» независимо от ходов соперника?

Ответ. Первый, кто сделает ход.

Решение. Выигрывает тот, после чьего хода в шкатулках не осталось бриллиантов. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Первым ходом он берет из первой шкатулки один бриллиант.

Далее возможны несколько случаев.

Случай 1. Второй взял один бриллиант из какой-нибудь шкатулки, отличной от первой, тогда первый берет по одному бриллианту из двух оставшихся (нетронутых) шкатулок.

Случай 2. Второй взял по одному бриллианту из каких-то двух шкатулок, отличных от первой, тогда первый берет один бриллиант из оставшейся (нетронутой) шкатулки.

В случаях 1 и 2 после хода первого в каждой шкатулке будет лежать четное число бриллиантов.

Случай 3. Второй взял один бриллиант из первой шкатулки, тогда первый берет один бриллиант из первой шкатулки.

Случай 4. Второй взял один бриллиант из первой шкатулки и один бриллиант из другой шкатулки, тогда первый берет по одному бриллианту из тех же шкатулок.

В случаях 3 и 4 после хода первого мы получим три шкатулки, в каждой из которых будет лежать нечетное число бриллиантов. Если же теперь второй возьмет один бриллиант из какой-нибудь шкатулки, то первому следует взять по одному бриллианту из двух оставшихся шкатулок. Если же второй взял по одному бриллианту из каких-то двух шкатулок, то первому следует взять один бриллиант из оставшейся шкатулки. Таким образом, и в случаях 3 и 4 мы получаем, что после некоторого хода первого в каждой шкатулке будет лежать четное число бриллиантов (возможно, ноль).

Следовательно, во всех случаях мы можем получить ситуацию, в которой после некоторого хода первого в каждой шкатулке будет лежать четное число бриллиантов (возможно, ноль). Каждым следующим ходом первый игрок должен брать столько же бриллиантов и из тех же шкатулок, что и второй. Итак, после каждого хода первого в каждой шкатулке будет оставаться четное число бриллиантов. Первый всегда сможет сделать ход, так как после хода второго в тех шкатулках, из которых он брал бриллианты, будет оставаться нечетное число бриллиантов – т.е. хотя бы по одному. А так как первый всегда сможет сделать ход, именно он заберет последние бриллианты из шкатулок и выиграет.

Комментарии.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6	В целом верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
3–5	Ход решения задачи верный, но рассмотрены либо не все случаи с количеством камней в шкатулках после ходов игроков, либо не в полном объеме описана стратегия первого игрока.

1–2	Есть продвижение в решении задачи, правильно сделано предположение о выигрышной стратегии первого игрока с учетом возможного начала игры.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.
0	Есть правильный ответ, без решения

Задача 4. Найти остаток от деления многочлена $f(x) = x^{2022} + x^{2021} + x^{2020} + \ldots + x^2 + x + 1$ на $x^2 - 1$.

Ответ. 1011x+1012.

Решение. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - 1$ есть многочлен не выше первой степени. Таким образом, $f(x) = (x^2 - 1)g(x) + ax + b$. Ясно, что $f(1) = 2023 = a + b$, а $f(-1) = 1 = -a + b$. Значит, $\begin{cases} a + b = 2023 \\ -a + b = 1 \end{cases}$. Отсюда, b=1012, $a = 1011$. Следовательно, остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - 1$ есть многочлен 1011x+1012.

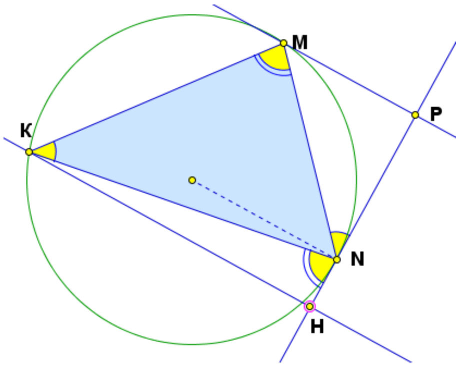
Комментарии.

Критерии	**Баллы**
Получен правильный обоснованный ответ	7
Правильно найдены значения f (1) и f (-1)	4
Правильно найден остаток от деления многочленов	2
Нет решения	0

Задача 5. Дан треугольник MNK, причем известно, что угол при вершине К в два раза меньше угла при вершине М. Через вершину N к окружности, описанной около треугольника MNK, проведена касательная. Расстояния до этой касательной от точек К и М соответственно равны 9 и 4. Найдите радиус окружности.

*Ответ.*32/7

Решение.



Обозначим радиус окружности R, $\angle MKN = \alpha$, тогда $\angle NMK = 2\alpha$. Используя обобщенную теорему синусов, можно записать:

$$MN = 2R\sin\alpha, \quad NK = 2R\sin 2\alpha.$$

Можно заметить, что $\alpha < 90°$ (сумма углов в треугольнике =180).

Используя теорему об угле между касательной и хордой, можно сделать вывод, что угол между касательной и MN равен α, а угол между касательной и NK равен 2α.

Следовательно, расстояние от точки M до касательной можно найти $MP = MN\sin\alpha = 2R\sin^2\alpha$.

Аналогично можно записать: $KH = NK\sin 2\alpha = 2R\sin^2 2\alpha$. Отсюда: $\frac{KH}{MP} = \frac{9}{4} = 4\cos^2\alpha$,

$$\cos^2\alpha = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Тогда $R = \frac{MP}{2\cdot\sin^2\alpha} = \frac{32}{7}$

Комментарии.

Правильность (ошибочность) решения	Баллы
Полное обоснованное решение.	7
Обоснованное решение с несущественными недочетами	6
Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи	2
Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.	1
Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0